

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Osztályozási fák, durva halmazok és alkalmazásaik

PhD értekezés

Készítette:

Veres Laura

okleveles matematikus-informatikus

Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola

DOKTORI ISKOLA VEZETŐJE:

Prof. Dr. Tóth Tibor

A műszaki tudomány doktora

TUDOMÁNYOS VEZETŐ:

Dr. habil Radeleczki Sándor

A matematikai tudomány kandidátusa

Miskolc, 2010

A témavezető ajánlása
Veres Laura: „Osztályozási fák, durva halmazok és alkalmazásaik” című
PhD értekezéséhez

Veres Laura szakmai munkáját hozzávetőleg 6 éve ismerem, amikor engedélyemért folyamodott, hogy a „Hálók, fogalomhálók és alkalmazásaik” című fakultatív PhD tárgy előadásain részt vegyen. Egy évvel később, 2005-ben sikeresen jelentkezett a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola nappali aspiráns képzésére. Érdeklődésének középpontjába a fogalomhálók és azok műszaki-informatikai alkalmazásai kerültek, ami később a részben-rendezett halmazok és durva halmazok vizsgálatával egészült ki, így lettem az értekezés témakörében a választott doktori vezetője. Az aspirantúra folyamán sikeresen bekapcsolódott a Miskolci Egyetem Analízis tanszékének, később pedig a Bay Zoltán Kutatóintézetnek a munkájába. Oktatói tevékenységét lelkiismeretesen és megbízhatóan végezte. Színvonalas munkája eredményeképpen 2008-ban sikeres abszolutóriumot szerzett maximális osztályzattal, majd néhány hónappal később elindította doktori eljárását.

A jelölt disszertációjában a fogalomhálókhoz kapcsolódó ún. dobozextenzió-hálók osztályozási fáival, kvázi rendezett halmazokon értelmezett durva halmazokkal és mindkét témakörnek az osztályozási feladatokban való alkalmazásaival foglalkozik, külön figyelemmel a csoporttechnológiai vonatkozásokra. Az osztályozási fák és a Czédli Gábor által bevezetett CD-independens halmazok között kapcsolatot vett észre és ezt felhasználta a dobozextenzió-háló osztályozási fáinak a jellemzésére. Kreatívan felhasználva B. Ganter, Körei Attila és a témavezető azon munkáit, amik egy elemi bővítés során kapott új kontextus dobozextenzióinak előállítására vonatkoznak, eljárást dolgozott ki az új kontextus osztályozási fáinak a régi kontextushoz tartozó osztályozási fák módosításával való előállítására. Igazolta, hogy ha a bővítés egy nem egyedi objektummal történik, akkor az új kontextushoz tartozó valamennyi osztályozási fa megkapható ezzel a rekurzív módszerrel. Még 2007-ben hozzákezdett egy, a durva halmazokra vonatkozó, T. B. Iwinski által 1992-ben felvetett kérdés megválaszolásához. Ismert volt, hogy tolerancia relációk, vagy csak tranzitív relációk esetén a durva halmazok általában nem alkotnak hálót - és mint sejtés az is megfogalmazódott az irodalomban, hogy kvázi rendezések esetén lehet hogy igen. Ezt a sejtést bizonyította először Veres Laura véges esetben, majd egy társszerzős dolgozatában végtelen esetre is kiterjesztette a bizonyítást és megmutatta a durva halmazok hálójának néhány olyan fontos tulajdonságát, amelyek ekvivalencia reláció esetén meglévő tulajdonságok általánosításai. A dolgozat 5. fejezetében a dobozextenziókkal és osztályozási fákkal kapcsolatos konstrukciók sikeres alkalmazása és továbbfejlesztése mellett egy új eljárást is bemutat a csoporttechnológiában fontos szerepet betöltő komplex alkatrészek meghatározására. Ennek eredményeképpen a jelölt megfogalmaz és implementál egy olyan algoritmust ami megadja minden lehetséges komplex alkatrész valamennyi tulajdonságát. Ez az eljárás a durva halmazok esetén értelmezett ún. modális operátorok csoporttechnológiai alkalmazásán alapszik.

Az elmúlt évek sikeres publikációs tevékenysége igazolta, hogy a jelölt képes színvonalas, önálló kutatómunkára. A disszertáció téziseivel kapcsolatos tudományos eredményeit rangos angol nyelvű folyóiratokban, illetve magyar és angol nyelvű konferenciákon publikálta. Ezek között egyaránt megtalálhatók mind elméleti jellegű, és mind műszaki, mind informatikai alkalmazásokat tartalmazó publikációk, így megállapítható, hogy azok mindenben eleget tesznek a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola publikációs követelményeinek. Maga az értekezés gondos és szerteágazó tudományos munkát tükröz és az irodalom kiváló ismeretét, felépítése alapos és jól átgondolt. A jelöltnek a tézisekhez kapcsolódó eredményei saját, önálló és helyes eredmények. Mindezekre tekintettel a jelölt számára határozottan javaslom a PhD cím odaítélését.

Miskolc, 2010. szeptember 1.

.....
dr. Radeleczi Sándor
tudományos vezető

Köszönetnyilvánítás

Az értekezés a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola keretein belül 2005-ben megkezdett kutatómunkám eredményeit foglalja össze. Köszönettel tartozom témavezetőmnek, **Dr. Radeleczki Sándornak**, aki 2004-ben megismertetett a foglomanalízis alapjaival, majd doktori tanulmányaim megkezdése után kutatómunkám irányítását is készséggel vállalta. Az elmúlt évek során szakmai és baráti tanácsokkal is ellátott, gondoskodott arról, hogy kutatómunkám során a helyes irányba tereljen és a dolgozat matematikai eredményeinek kidolgozásában pótolhatatlan segítséget nyújtott.

Köszönettel tartozom a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola vezetőjének, **Prof. Dr. Tóth Tibornak**, aki nagy segítséget nyújtott az alkalmazások alapjául szolgáló szakirodalom megismerésében, szeretném megköszönni értékes szakmai tanácsait és hasznos javaslatait.

Köszönettel tartozom **Dr Jouni Järvinennek**, akinek a publikációs szolgáltató a dolgozat második „durva halmazokkal” foglalkozó részének a kiinduló pontjaként.

Köszönetet mondok kollégáimnak a Matematikai Intézet munkatársainak, akik ötleteikkel segítették munkámat.

Végül de nem utolsó sorban köszönetet mondok családomnak a biztatásukért és türelmükért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1 A dolgozat felépítése	4
1.2 Irodalmi áttekintés	5
1.3 A kutatás célja	6
2. Háló, fogalomháló, dobozháló	8
2.1 Háló	8
2.2 Fogalomhálók	11
2.3 Dobozhálók	16
3. Elemi kontextusbővítés és osztályozási fák	18
3.1 Doboz-extenziók	18
3.2 Egy részkontextushoz tartozó doboz-extenziók	20
3.3 Elemi kontextusbővítések	21
3.4 Osztályozási fák és CD-independens halmazok	23
3.5 Osztályozási fák a doboz-extenziók hálójában	31
4. Durva halmazok	37
4.1 Bevezetés	37
4.2 Az approximációk érdekes tulajdonságai különböző relációk esetén	40
4.3 Kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálója	43
4.4 A durva halmazok hálójának egyéb tulajdonságai	49
5. Alkalmazások	53
5.1 Osztályozási fa konstruálása a doboz-extenziók hálójában	53
5.2 Doboz-extenziók meghatározása egy kontextus elemi bővítése után	55
5.3 Komplex alkatrészek	57
5.3.1 Durva halmazok és fogalomháló kapcsolata	58
5.3.2 Komplex alkatrészek megkonstruálása	60
6. Új tudományos eredmények	65
7. További kutatási feladatok	68
8. Összefoglaló	69
9. Summary	70
Az értekezés témakörében készített saját publikációk	71
Irodalomjegyzék	72
Jelölések jegyzéke	76

1. Bevezetés

Értekezésem első részében a hálóelméletből jól ismert struktúrát, a fogalomhálót vizsgálom. Egy fogalomháló, mint a neve is mutatja fogalmakból épül fel, azaz objektumokból és a rájuk jellemző tulajdonságokból, így tekinthetjük az emberi gondolkodás egyfajta absztrakt modelljének is. A fogalmakat egy, legtöbbször táblázatban megadott, kontextusból generáljuk és mint egy adatmodellből kiolvashatjuk az objektumok halmaza (például alkatrészek) és a rájuk jellemző tulajdonságok halmaza közötti kapcsolatot. A fogalompárok (objektumok és tulajdonságok párosa) fogalomhálóba rendezésével még jobb képet kaphatunk az adathalmaz elemei közötti rejtett kapcsolatokról, hierarchiájukról. Értekezésemben a fogalomhálók, ezen belül is a doboz-extenzió hálók elméletének egy kevésbé vizsgált alkalmazását, az objektumok osztályozási fákba való besorolását tanulmányozom. A nagyméretű adathalmazok elemeinek az ismert tulajdonságok alapján történő csoportosítása az adatbányászat egyik legfontosabb feladata. A csoportok kialakítása két eljárással történhet: osztályozással (ebben az esetben valamilyen tulajdonságok alapján soroljuk be az elemeket) vagy klaszterezéssel (ebben az esetben az adatok maguk alakítják ki a „csoportjaikat”). Mindkét módszer lényege, hogy az objektumhalmazt úgy particionálja, hogy az azonos csoportba tartozó objektumok több hasonlósággal rendelkezzenek, mint a többi csoportba sorolt elemek. Az adathalmazban való keresést könnyítik meg az általam vizsgált osztályozási fák.

A dolgozat második részében az ún. durva halmazokkal foglalkozom. A durva halmaz fogalma Z. Pawlak nevéhez fűződik, aki a durva halmazokat a korai 80-as években vezette be. Az elmélet alapötlete, hogy ismereteinket egy adott objektumról egy ún. megkülönböztethetlenségi relációval adjuk meg. Ez azt jelenti, hogy - két objektum „megkülönböztethetetlen” ha ismert tulajdonságaik alapján nem tudjuk őket megkülönböztetni egymástól. J.S. Pomykała és J. A. Pomykała egyik cikkükben bebizonyították, hogy ekvivalencia reláció esetén (azaz ha a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív) a durva halmazok egy hálót alkotnak, mégpedig egy teljes Stone hálót. Ebből az eredményből kiindulva sikerült általánosítanom ezt a tételt reflexív és tranzitív (kvázirendezési) relációra, és így bebizonyítani egy a 90-es évek óta megválaszolatlan kérdést.

A durva halmazokat és alkalmazásaikat több szempontból is vizsgálták, például tanulmányozták hogy milyen kapcsolat van a durva halmazok elmélete és a fuzzy halmazok elmélete között, így született meg a fuzzy durva halmaz fogalma, amelyet az adatbányászatban használnak. Külön kiemelném az adatbányászatban és a közelítő algoritmusok kidolgozásában való felhasználásukat. Az, hogy kapcsolat van a fogalomanalízis és a durva halmazok elmélete között már korábban felmerült a szakirodalomban. A dolgozatomban bemutatom a durva halmazoknak, pontosabban a velük szoros összefüggésben lévő modális operátoroknak egy alkalmazását a csoporttechnológiában. A csoporttechnológiában az alkatrészgyártás megtervezése, illetve a gyártócellák kialakítása a különböző alkatrészek, technológiai folyamatok közötti hasonlóság felhasználásán alapszik. Az alkatrészcsoportok kialakításánál az ún. komplex alkatrészekből is kiindulhatunk, melyeket úgy kapunk, hogy egy alkatrészcsoport valamennyi tagjának a tulajdonságait egyetlen (legtöbbször képzeletbeli) alkatrészen jelenítjük meg. A csoporthoz tartozó összes többi alkatrészt ugyanezek a tulajdonságok egy részhalmazra jellemez. Dolgozatomban egy algoritmust konstruáltam, ami egy alkatrészhalmazhoz tartozó kontextusból kiindulva megadja a csoportnak megfelelő komplex alkatrészeket, pontosabban a komplex alkatrészek tulajdonságait.

1.1. A dolgozat felépítése

Az értekezés bevezető része egy rövid irodalmi áttekintés mellett a kutatás célkitűzéseit is tartalmazza.

A második fejezetben bemutatom a kutatáshoz szükséges elméleti háttérrel, a hálóelmélet illetve fogalomanalízis legalapvetőbb definícióit és eredményeit, amelyek nélkülözhetetlenek a további kutatáshoz. A harmadik fejezetben definiálom az osztályozási fa fogalmát és struktúra tételeket bizonyítok az osztályozási fák szerkezetére vonatkozóan. Megvizsgálom hogyan változik meg egy kontextus ún. elemi bővítés során, illetve hogyan változik egy osztályozási fa szerkezete az elemi bővítés után. Itt egy olyan program pszeudokódját adom meg, amely a doboz-extenziók hálójában ún ortogonális rendszerek segítségével konstruálja meg az osztályozási fát.

A negyedik fejezetben a durva halmazok elméletének alapjait ismertetem. Ismertetem a kutatáshoz szükséges alapvető definíciókat és bebizonyítom, hogy a kvázi rendezéssel definiált durva halmazok hálót alkotnak. Ugyancsak itt bemutatom ennek a hálónak néhány jellegzetes tulajdonságát.

A disszertáció ötödik fejezete az alkalmazásokat mutatja be, amelyek szorosan kapcsolódnak az eddig bemutatott matematikai elméletekhez. Egy olyan program pszeudokódját ismertetem, amely megkonstruálja az új bővített kontextushoz tartozó doboz-extenzió háló egy osztályozási fáját kiindulva a régi kontextus egy osztályozási fájából. Bemutatok egy módszert, amely optimális módon állítja elő egy bővített kontextushoz tartozó doboz-extenzió hálót. Végül a durva halmazok, illetve a modális operátorok egy csoporttechnológiai alkalmazását is bemutatom.

A hatodik fejezetben az új tudományos eredményeket és az értekezés téziseit fogalmazom meg. A hetedik fejezetben a további kutatási feladatokból ismertetek néhányat. Az utolsó két fejezet az értekezés tömör összefoglalását tartalmazza magyar és angol nyelven egyaránt.

1.2. Irodalmi áttekintés

Kutatásom első részének elméleti alapját a részbenrendezett halmazok és hálók elmélete jelenti. A kutatásomhoz bőséges szakirodalmat találtam. A magyar nyelven írott művek közül a Szász Gábor klasszikusnak számító *Hálóelmélet* című könyvét [43], Czédli Gábor *Hálóelmélet* jegyzetét [3] emelném ki, amely már a fogalomhálókkal kapcsolatos definíciókat is tartalmazza. Az angol nyelvű irodalomban is számos forrás található, ezek közül Grätzer György *General Lattice Theory* című könyvét [13] és B. A. Davey, H. A. Priestley *Introduction to Lattices and Order* monográfiáját [6] emelném ki. A fogalomanalízis módszerét kitűnően mutatja be Bernhard Ganter és Rudolf Wille *Formal Concept Analysis* [9] című alapműve, amely nemcsak az alapvető definíciókat és fogalmakat adja meg, hanem kijelöli a további kutatási irányokat is. Szintén nagy segítség, hogy az általuk létesített honlapon <http://fcahome.org.uk> megtalálhatók a fogalomanalízissel és alkalmazásaival kapcsolatos legújabb eredmények.

Az objektumhalmaz felbontásának problémáját Rudolf Wille vetette fel egyik cikkében [47]. Ebből a cikkből kiindulva Radeleczki Sándor bevezette a dobozháló fogalmát és megvizsgálta ennek tulajdonságait [35], [36], [37], melyek nélkülözhetetlenek a kutatásomhoz. A dobozháló használata nagyban megkönnyíti a nagyméretű kontextusok, adathalmazok vizsgálatát, az ebben végzett kereséseket. A dolgozatban megvizsgálom, hogyan építhetők fel az ún. osztályozási fák tolerancia osztályokkal, ortogonális rendszerekkel - ehhez az elméleti alapot J. A. Srejder [41] könyve nyújtotta. G. Czédli, M. Hartmann, E.T. Schmidt

[5] cikke alapján újabb ötletek születtek az osztályozási fák megkonstruálására. A kutatásomnak új irányt adott a B. Ganter, A. Körei, S. Radeleczki *Extent partitions and context extensions* című cikke [10], melynek hatására az osztályozási fák egy teljesen új alkalmazása vált lehetővé. Az osztályozási fák megkonstruálására írt algoritmusoknál nagy segítséget nyújtott Kovács László cikke [26], amely egy hatékony módszert ad osztályozási fák megkonstruálásához. Az algoritmusok pszeudokódjainak megírásakor Cormen és társai által írt *Algoritmusok* c. könyvben [2] rögzített konvenciókat követtem.

Az értekezés másik kutatási irányának alapja a durva halmazok elmélete. A durva halmaz fogalmát Z. Pawlak vezette be a korai 80-as években. A kutatásom elméleti alapjaként főként Z. Pawlak, a Pomykala fivérek és J. Järvinen cikkeit [21], [22], [33] emelném ki. Az elmúlt három évtizedben különböző típusú (reflexív, szimmetrikus, tolerancia) relációk által definiált durva halmazokat vizsgáltak, ezen a területen is bőséges szakirodalmat találtam, melyek közül ismét J. Järvinen cikkét emelném ki [19]. A fogalomanalízis és a durva halmazok elméletének összekapcsolásával született meg az ún. Rough concept analysis. Az ún. modális operátorok segítségével Y. Yao [14] három különböző típusú „fogalomhálót” definiál. A modális operátorok segítségével bemutatunk egy csoporttechnológiai alkalmazást. Ennek kiinduló pontja Mitrofanov *A csoportmegmunkálás technológiai alapjai* című könyve [32].

1.3. A kutatás célja

Tudományos kutatómunkám során két fő feladat elvégzésére törekedtem:

1. A [28] cikkből kiindulva általánosítottam az osztályozási fa fogalmát. Később a [10] cikk alapján adódott az ötlet, hogy megvizsgáljam, hogyan változik egy osztályozási fa, ha a kontextust, amelyből felépítettük bővítjük egy elemmel. A matematikai háttér pontos kidolgozása mellett fő célom volt egy olyan program megadása, amely egy elemi bővítés során a régi kontextushoz tartozó osztályozási fából kiindulva megépíti az új kontextushoz tartozó osztályozási fát. Egy másik célkitűzésem az volt, hogy optimalizáljam azt az eljárást, ami megadja az új kontextushoz tartozó doboz-extenzió hálót a kontextus elemi bővítése után.

2. A durva halmazok elméletével foglalkozó irodalom alapos áttanulmányozása után a kvázirendezéssel definiált durva halmazok vizsgálatával foglalkoztam. Tanulmányoztam, hogy hálót alkotnak-e illetve azt, hogy az így kapott háló milyen tulajdonságokkal rendelkezik. Megvizsgáltam a durva halmazok elméletének és a fogalomanalízis összekapcsolódásánál szerepet játszó modális operátorok felhasználását a csoporttechnológiai vizsgálatokban, azon belül is a komplex alkatrészek meghatározásában.

2. Háló, fogalomháló, dobozháló

Ebben a fejezetben bemutatjuk a kutatás elméleti alapjait, így például, a részbenrendezett halmaz fogalmát, és ebből kiindulva definiáljuk a háló fogalmát, illetve bemutatjuk a fontosabb tulajdonságait. A következő két alfejezetben bemutatjuk egy kontextushoz tartozó fogalomháló definícióját és tulajdonságait, illetve a fogalomhálózhoz tartozó dobozháló fogalmát és tulajdonságait, amely a további kutatásunk alapjául szolgál. A rövidség kedvéért csak a legalapvetőbb fogalmakat vezetjük be illetve a hivatkozott tételek, állítások bizonyításait is a hely szűke miatt nem mutatjuk be.

A kutatásomhoz bőséges szakirodalmat találtam. A részbenrendezett halmazokat és hálókat bemutató első alfejezethez elsősorban Szász Gábor könyvét [43], illetve Czédli Gábor jegyzetét [3] használtuk. A fogalomháló definíciója illetve az ezzel kapcsolatos eredmények a B. Ganter, R. Wille szerzőpáros könyvében [9] található. A dobozhálók alfejezet alapjául Radeleczki Sándor [36], [37] cikkei szolgáltak.

2.1. Hálók

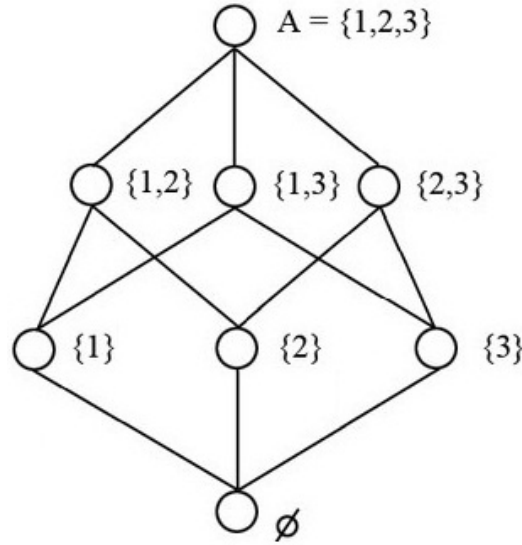
Egy P nemüres halmaz elemei között értelmezett, „ $\leq$ ”-vel jelölt bináris relációt **részbenrendezésnek** nevezünk, ha minden $x, y, z \in P$ -re teljesülnek az alábbi feltételek:

1. $x \leq x$ (reflexivitás),
2. $x \leq y$ és $y \leq x$ esetén $x = y$ (antiszimmetria),
3. $x \leq y$ és $y \leq z$ esetén $x \leq z$ (transzitivitás).

Ha a P nemüres halmazon értelmezett egy $\leq$ részbenrendezés, akkor P -t (azaz a $(P, \leq)$ párt) **részbenrendezett halmaznak** nevezzük. A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz a, b elemére az $a < b$ jelölést használjuk, ha $a \leq b$, de $a \neq b$. Az $a \prec b$ jelölés pedig azt jelenti, hogy b **rákövetkezője** a -nak, azaz $a < b$ és nem létezik olyan $x \in P$ elem, amelyre $a < x < b$ teljesül. A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz két a, b elemét **összehasonlíthatónak** nevezzük, ha $a \leq b$ vagy $b \leq a$ teljesül.

Példa: Jelöljük $\wp(A)$ -val az A részhalmazainak az összességét, azaz a hatványhalmazát. A részhalmazok közötti $\subseteq$ tartalmazási reláció egy részbenrendezés az A halmazon, vagyis $(\wp(A), \subseteq)$ egy részbenrendezett halmaz.

Megjegyzés. Minden véges $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz szemléltethető ún. **Hasse diagrammal**, amely a rákövetkezés elvét használja a következőképpen: A P halmaz elemeit kis körökkel ábrázoljuk a síkban $a, b \in P$ -re akkor és csak akkor megy él a -ból b -be, ha $a \prec b$, azaz b -t a fölé rajzoljuk.



1. Ábra Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmaz részhalmazainak Hasse diagramja

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy $a \in P$ a P **legkisebb eleme**, ha minden $x \in P$ -re $a \leq x$. Hasonlóan, $b \in P$ elemet P **legnagyobb elemének** nevezzük, ha minden $x \in P$ -re $x \leq b$. A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz legkisebb elemét 0_P -vel (vagy egyszerűen 0-val), a legnagyobb elemét pedig 1_P -vel (vagy 1-el) jelöljük. Például a $(\wp(A), \subseteq)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme az üres halmaz, legnagyobb eleme pedig maga az A halmaz.

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, és A a P egy nemüres részhalmaza. A $p \in P$ elemet az A halmaz **alsó korlátjának** nevezzük, ha $p \leq a$ minden $a \in A$ -ra, és hasonlóan, a $p \in P$ elem az A halmaz **felső korlátja**, ha $p \geq a$ minden $a \in A$ -ra. A p elemet az A halmaz **legnagyobb alsó korlátjának (infimumának)** nevezzük, ha p alsó korlátja A -nak, és A minden egyéb k alsó korlátja esetén $p \geq k$. Az A halmaz infimumát gyakran elemei metszetének nevezzük, $\inf A$ -val vagy $\wedge A$ -val jelöljük. A p elemet az A halmaz **legkisebb felső korlátjának (szuprémumának)** nevezzük, ha p felső korlátja A -nak, és A minden egyéb k felső korlátjára $p \leq k$ teljesül. Az A halmaz szuprémumát gyakran elemei egyesítésének nevezzük és $\sup A$ -val vagy $\vee A$ -val jelöljük.

Tekintsünk néhány alapvető fogalmat ([3]):

2.1. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz és $B \subseteq P$ nemüres részhalmaz.

- (i) B -t **láncnak** nevezzük, ha bármely $a, b \in B$ esetén $a \leq b$ vagy $b \leq a$, azaz bármely két eleme összehasonlítható;
- (ii) B -t **antiláncnak** nevezzük, ha B bármely két különböző eleme összehasonlíthatatlan;

(iii) B -t **rendezésideálnak** nevezzük, ha bármely $b \in B$ -re és $a \in P$ -re ha $a \leq b$ akkor $a \in B$.

2.2. Definíció. Legyen $(L, \leq)$ részbenrendezett halmaz.

- (i) L -t **metszetfélhálónak** nevezzük, ha bármely kételemű részhalmazának létezik infimuma (metszete),
- (ii) L -t **hálónak** nevezzük, ha L bármely kételemű részhalmazának létezik szuprémuma és infimuma.
- (iii) Ha L bármely nemüres részhalmazának létezik infimuma és szuprémuma, akkor L -t **teljes hálónak** nevezzük.

Példa: $(\wp(A), \subseteq)$ teljes háló, amelyben $X \subseteq \wp(A)$ esetén X szuprémuma az X -et alkotó halmazok uniója, infimuma pedig az X -beli halmazok metszete.

- 2.3. Megjegyzés.** (i) Minden véges háló egyúttal teljes háló is.
(ii) Minden $(L, \leq)$ teljes hálónak van legkisebb és legnagyobb eleme, méghozzá $\inf L = 0$ és $\sup L = 1$.

A hálókat kétműveletes algebrai struktúráként is definiálhatjuk, az alábbi definíciót [3]-ból vettük át.

2.4. Definíció. Az $(L, \wedge, \vee)$ algebrai struktúrát **hálónak** nevezzük, ha $\wedge$ és $\vee$ bináris műveleteket jelölnek az L nemüres halmaz elemei között, úgy, hogy $\forall x, y, z \in L$ -re az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. $x \wedge y = y \wedge x$ és $x \vee y = y \vee x$ (kommutativitás),
2. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ és $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (asszociativitás),
3. $x \wedge x = x$ és $x \vee x = x$ (idempotencia),
4. $x \vee (x \wedge y) = x$ és $x \wedge (x \vee y) = x$ (elnyelési tulajdonságok).

Ha egy $(L, \leq)$ részbenrendezett halmaz, ahol $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ és $a \vee b = \sup\{a, b\}$, háló a 2.2. Definíció értelmében, akkor $(L, \wedge, \vee)$ háló a 2.4. Definíció értelmében is. Fordítva, ha adott az $(L, \wedge, \vee)$ algebrai struktúra ami háló a 2.4. Definíció értelmében, akkor az $a \leq b \iff a = a \wedge b$ összefüggés egy részbenrendezést definiál és könnyen bizonyítható, hogy az $(L, \leq)$ részbenrendezett halmaz a 2.2. Definíció értelmében.

Például a $(\wp(A), \subseteq)$ hálózhoz a $(\wp(A), \cap, \cup)$ algebrai struktúra rendelhető hozzá.

A továbbiakban a hálókra a fentebb használt két jelölés $(L, \leq)$ és $(L, \wedge, \vee)$ helyett is egységes jelölést vezetünk be, csak az alaphalmazzal fogjuk jelölni, L -el, hiszen láthattuk, hogy mindkét definíció ugyanahhoz a struktúrához vezetett. Két háló azonban akkor is lehet azonos, azaz izomorf, ha elemeik különböznek.

Az L_1 és L_2 hálókat **izomorf**nak nevezzük, ha van olyan $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ bijektív leképezés, hogy $a \leq b$ pontosan akkor teljesül L_1 -ben, ha $\Phi(a) \leq \Phi(b)$ L_2 -ben. Jelölés: $L_1 \cong L_2$. Ha az L_1 és L_2 hálók a 2.4. Definícióval vannak megadva, akkor izomorfnak nevezzük őket, ha van olyan $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ bijektív leképezés, amelyre $\Phi(a \vee b) = \Phi(a) \vee \Phi(b)$

és $\Phi(a \wedge b) = \Phi(a) \wedge \Phi(b)$ teljesül bármely $a, b \in L_1$ esetén. Az izomorf véges hálók Hasse diagramjai is izomorfak mint gráfok.

2.5. Definíció. ([3]) (i) Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, h pedig egy $P \rightarrow P$ leképezés. Ha h monoton, extenzív és idempotens, akkor **zárási operátornak** nevezzük.

(ii) Legyen A egy halmaz $\Phi \subseteq \wp(A)$ -t **zárási rendszernek** nevezzük, ha tetszőleges $S \subseteq \Phi$ esetén $\cap S \in \Phi$ teljesül.

(iii) Legyen $(A, \leq)$ egy részbenrendezett korlátos halmaz. Tetszőleges $X \subseteq A$ -ra jelölje X_* illetve X^* az X alsó illetve felső korlátainak halmazát. A $\wp(A) \rightarrow \wp(A)$, $X \rightarrow (X^*)_*$ zárási operátorhoz tartozó lezárási rendszert **Dedekind–McNeille-féle lezárási rendszernek** nevezzük.

A következő definíciókkal a hálók néhány speciális elemét határozzuk meg, ezeket a definíciókat is [3]-ból vettük át.

2.6. Definíció. Legyen p az L háló egy 0-tól különböző eleme. Ha a $p = \bigwedge \{x_j \mid x_j \in L, j \in J\}$ egyenlőségből $p = x_{j_0}$ következik valamely $j_0 \in J$ -re, akkor p -t (teljesen) **metszet-irreducibilis elemnek** nevezzük. Hasonlóképpen, ha a $p = \bigvee \{x_j \mid x_j \in L, j \in J\}$ egyenlőség csak akkor lehetséges, ha $p = x_{j_0}$ valamely $j_0 \in J$ -re, akkor p -t (teljesen) **egyesítés-irreducibilis elemnek** nevezzük. Vagyis egy metszet-irreducibilis elem nem állhat elő más elemek infimumaként, egy egyesítés-irreducibilis elem pedig más elemek szuprémumaként. Az L hálót **CJ-generált hálónak** nevezzük, ha minden, 0-tól különböző eleme előáll egyesítés-irreducibilis elemek szuprémumaként. A **CJ** rövidítés az angol completely join-irreducible szavakból ered.

2.7. Definíció. Ha az L hálónak van legkisebb eleme, akkor annak rákövetkezőit a háló **atomjainak** nevezzük. Egy L hálót **atomisztikusnak** nevezünk, ha minden $x \in L$ eleme a háló x -nél kisebb atomjainak a szuprémuma, azaz $x = \bigvee \{a_x \mid a_x \leq x, a_x \text{ atom } A\text{-ban}\}$.

2.2. Fogalomhálók

A 80-as években Rudolf Willel új fejezet kezdődött a hálóelméletben foglomanalízis néven. A foglomanalízisben értelmezett fogalmak az objektumok és az őket jellemző tulajdonságok párosai. Az így definiált fogalmak hálót alkotnak, ún. fogalomhálót, melynek segítségével az adataink és a közöttük lévő kapcsolatok átláthatóbbá, könnyebben kezelhetővé válnak. A foglomanalízis rohamléptekkel fejlődik és nem csak a matematikusok használják munkájuk megkönnyítésére, hanem fizikusok, informatikusok, biológusok, az orvostudomány is felfedezte a benne rejlő lehetőségeket.

Az alfejezetben található definíciókat, állításokat, tételeket [9]-ből vettük át.

Egy formális **kontextus** egy (G, M, I) hármas, ahol G az objektumok halmaza, M az attribútumok halmaza, $I \subseteq G \times M$ egy bináris reláció, a g Im reláció pedig azt jelenti, hogy a g objektum rendelkezik az m tulajdonsággal (ahol $g \in G$, $m \in M$). Ha G és M egyaránt véges halmaz, akkor azt mondjuk, hogy a (G, M, I) kontextus is **véges**. Legyen $K = (G, M, I)$ egy kontextus és $H \subseteq G$ és $N \subseteq M$ két halmaz, akkor a $(H, N, I \cap H \times N)$ hármas a (G, M, I) kontextus **részkontextusának** nevezzük.

A kisebb kontextusok táblázat formájában ábrázolhatók, a táblázat sorait az objektumok neveivel, a táblázat oszlopait pedig a tulajdonságokkal megcímkezve, egy adott sor és oszlop kereszteződésébe akkor teszünk x-et, ha az objektum rendelkezik az adott tulajdonsággal.

K	ATTRIBÚTUMOK (M)							
		m ₁	m ₂	m ₃	m ₄	m ₅	m ₆	m ₇
O								
B	g ₁		×	×		×		×
J	g ₂		×	×			×	
E	g ₃		×		×			×
K	g ₄	×		×	×			×
T	g ₅		×			×		×
U	g ₆		×	×	×			×
M	g ₇		×				×	
O								
K								
(G)								

1. táblázat Példa kontextusra

2.8. Definíció. Minden $A \subseteq G$ és $B \subseteq M$ halmazra értelmezzük az alábbi halmazokat:

$$A' = \{m \in M \mid g \text{ Im valamennyi } g \in A\text{-ra}\}$$

$$B' = \{g \in G \mid g \text{ Im valamennyi } m \in B\text{-re}\},$$

ahol A' az A elemeinek közös tulajdonságait jelöli, B' pedig minden G -beli elemek összességét, amelyek rendelkeznek valamennyi B -beli tulajdonsággal. Az (A, B) párt a (G, M, I) kontextushoz tartozó **fogalomnak** nevezzük, ha $A' = B$ és $B' = A$, ahol $A \subseteq G$, $B \subseteq M$. Az A halmazt az (A, B) fogalom **objektumrészének** vagy **extenziójának**, míg a B halmazt az (A, B) fogalom **tulajdonságrészének** vagy **intenziójának** nevezzük.

Az 1. táblázatban szereplő kontextus egy fogalma például a $(\{g_3, g_4\}, \{m_4, m_7\})$ halmazpár. Mivel egy (A, B) fogalom A extenziója és B intenziója egymást kölcsönösen meghatározza, ezért egy fogalom ismeretéhez elegendő a halmazpár egyik „felének“ ismerete. Az alkalmazásoknál főként a fogalom-extenziót fogjuk használni. A továbbiakban a (G, M, I) kontextus extenzióit $\text{Ext}(G, M, I)$ -vel, az intenzióit pedig $\text{Int}(G, M, I)$ -vel jelöljük.

2.9. Állítás. Legyen (G, M, I) egy kontextus, A, A_1, A_2 objektumok tetszőleges halmazai, B, B_1, B_2 pedig attribútumok halmazai. Ekkor

$$1. A_1 \subseteq A_2 \implies A'_2 \subseteq A'_1 \text{ és } B_1 \subseteq B_2 \implies B'_2 \subseteq B'_1.$$

$$2. A \subseteq A'' \text{ és } B \subseteq B''.$$

$$3. A' = A''' \text{ és } B' = B'''.$$

$$4. (A'', A') \text{ és } (B', B'') \text{ fogalmak.}$$

5. A'' a legszűkebb A -t tartalmazó extenzió és B'' a legszűkebb B -t tartalmazó intenzió.

$$6. A \in \text{Ext}(G, M, I) \iff A = A'' \text{ és } B \in \text{Int}(G, M, I) \iff B = B''.$$

2.10. Állítás. Legyen J egy tetszőleges indexhalmaz és (A_j, B_j) a (G, M, I) kontextushoz tartozó fogalmak $\forall j \in J$ -re. Ekkor $\bigcap_{j \in J} A_j \in \text{Ext}(G, M, I)$ és $\bigcap_{j \in J} B_j \in \text{Int}(G, M, I)$.

Egy kontextus fogalmai között értelmezhető egy rendezési reláció a következőképpen (lásd [6]):

2.11. Definíció. Legyen (G, M, I) egy kontextus és $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ a kontextushoz tartozó fogalmak. Azt mondjuk, hogy $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$, ha $A_1 \subseteq A_2$ (ekkor $B_2 \subseteq B_1$ is teljesül).

Könnyen belátható, hogy az így értelmezett reláció egy részbenrendezés a fogalmak között. A (G, M, I) kontextushoz tartozó fogalmak összességét a fentebb értelmezett rendezéssel ellátva egy teljes hálót kapunk, amelyet $\mathcal{L}(G, M, I)$ -vel jelölünk. Az így kapott $\mathcal{L}(G, M, I)$ hálót a (G, M, I) kontextushoz tartozó **fogalomhálónak** nevezzük, amelyben az (A_i, B_i) , $i \in I$ fogalmak infimumát, illetve a szuprémumát a következő képletek adják meg:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (A_i, B_i) &= (\bigcup_{i \in I} A_i, (\bigcap_{i \in I} B_i)'') \\ \bigvee_{i \in I} (A_i, B_i) &= ((\bigcap_{i \in I} A_i)'', \bigcup_{i \in I} B_i) \end{aligned}$$

2.12. Definíció. Legyen (G, M, I) egy kontextus. A $g \in G$ objektumhoz tartozó **objektum-intenzió**n a $\{g\}' = \{m \in M \mid (g, m) \in I\}$ halmazt értjük és röviden g' -el jelöljük. Hasonlóképpen az $m \in M$ tulajdonsághoz tartozó **attribútum-extenzió**n az $\{m\}' = \{g \in G \mid (g, m) \in I\}$ halmazt értjük és röviden m' -el jelöljük. A (g'', g') alakú fogalmakat **objektum-fogalmaknak**, míg a (m', m'') alakúakat **attribútum-fogalmaknak** nevezzük.

2.13. Állítás. Az $\mathcal{L}(G, M, I)$ fogalomháló minden eleme előáll objektum-fogalmak szuprémumaként illetve attribútum-fogalmak infimumaként a következő formában: ha $(A, B) \in \mathcal{L}(G, M, I)$, akkor

$$\bigvee_{g \in A} (g'', g') = (A, B) = \bigwedge_{m \in B} (m', m'').$$

2.14. Következmény. Az $\mathcal{L}(G, M, I)$ fogalomháló minden fogalmának objektumrésze előáll attribútum-extenziók metszeteként és minden tulajdonságrész előállítható objektum-intenziók metszeteként.

Algoritmus fogalomextpart [9] A 2.14 Következményből kiindulva megadhatunk egy egyszerű eljárást amely egy adott kontextus összes fogalom-extenzióját előállítja. Az alábbi algoritmus egy L listába gyűjti az összes olyan halmazt, amely attribútum-extenziók metszeteként állítható elő, azaz a folyamat végén az L lista az $\mathcal{L}(G, M, I)$ fogalomháló minden fogalom-extenzióját tartalmazza.

fogalomextpart

Az L lista első eleme maga a G halmaz

minden $m \in M$ attribútum esetén

minden $A \in L$ halmazra

ha $A \cap m' \notin L$

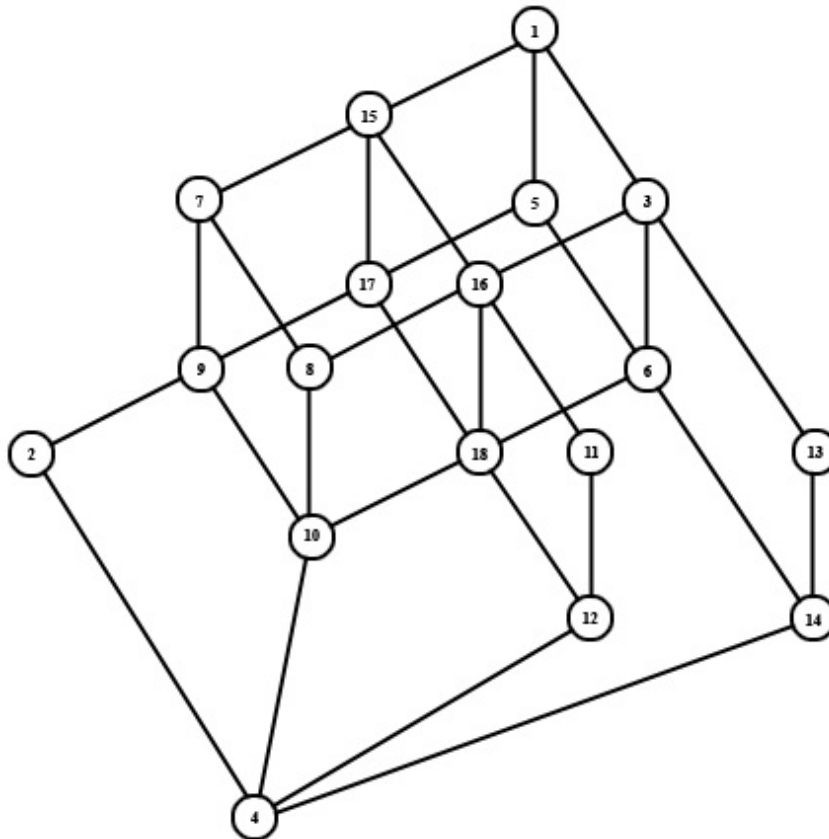
akkor az L listát bővítsd az $A \cap m'$ halmazzal.

Tekintsük az 1. táblázatban szereplő kontextust és alkalmazzuk rá a *fogalomextpart* algoritmust. Az alábbi táblázatban bemutatjuk lépésről-lépésre, hogy az L lista mely fogalom-extenziókat fogja tartalmazni:

Sorszám	Attribútum	Extenzió
1.		$\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7\}$
2.	m_1	$\{g_4\}$
3.	m_2	$\{g_1, g_2, g_3, g_5, g_6, g_7\}$
4.	m_2	$\emptyset$
5.	m_3	$\{g_1, g_2, g_4, g_6\}$
6.	m_3	$\{g_1, g_2, g_6\}$
7.	m_4	$\{g_3, g_4, g_6\}$
8.	m_4	$\{g_3, g_6\}$
9.	m_4	$\{g_4, g_6\}$
10.	m_4	$\{g_6\}$
11.	m_5	$\{g_1, g_5\}$
12.	m_5	$\{g_1\}$
13.	m_6	$\{g_2, g_7\}$
14.	m_6	$\{g_2\}$
15.	m_7	$\{g_1, g_3, g_4, g_5, g_6\}$
16.	m_7	$\{g_1, g_3, g_5, g_6\}$
17.	m_7	$\{g_1, g_4, g_6\}$
18.	m_7	$\{g_1, g_6\}$

2. táblázat Példa fogalom-extenziók meghatározására

Ismerve a kontextust és a fogalom-extenziókat már könnyen előállíthatjuk a fogalmak intenzióit is. Az 1. táblázatban szereplő kontextushoz tartozó fogalomháló Hasse diagramja az alábbi ábrán látható. Minden csomópont egy fogalmat jelöl, a csomópontokban lévő szám az adott fogalom-extenziójához tartozó sorszám az előbbi táblázatból:



2. Ábra Fogalomháló Hasse diagramja

A *fogalomextpart* algoritmus a legismertebb módszer a fogalomháló előállítására [9], melyet az irodalomban a fogalomháló-építés „naív” algoritmusának is neveznek. Nagyméretű kontextusok esetén azonban a hatékonysága csökken. Ilyenkor érdemesebb egy hatékonyabb algoritmust alkalmazni, például a Ganter-féle „next closure” algoritmust [9], vagy a Godin-féle inkrementális módszert [12], amely a kontextus fokozatos bővítésével állítja elő a fogalmak halmazát. Kovács László ennek az algoritmusnak a továbbfejlesztésével még hatékonyabb algoritmust állított elő [25].

Hatékony módszer még a kontextus sor illetve oszlop redukálása (ha két sor vagy oszlop megegyezik csak az egyiket tartjuk meg), hiszen ez nem változtat a kontextushoz tartozó fogalomháló szerkezetén.

2.15. Definíció. ([3]) Egy (G, M, I) kontextust **sor-redukáltnak** nevezünk, ha minden $g \in G$ objektum esetén a (g'', g') fogalom egyesítés-irreducibilis. A kontextust **oszlop-redukáltnak** hívjuk, ha minden $m \in M$ -re az (m', m'') fogalom metszet-irreducibilis. Ha egy kontextus sor- és oszlop-redukált is, akkor **redukáltnak** nevezzük.

2.3. Dobozhálók

Az alfejezet alapjául szolgáló fogalmakat mint például osztályozási rendszer, dobozelem, dobozháló, Radeleczki Sándor vezette be [36], [37] cikkeiben. A dobozelemek, dobozháló szolgál további kutatásaink alapjául.

2.16. Definíció. Legyen G egy halmaz és $P = \{G_j \mid j \in J\}$ a G halmaz nemüres részhalmazáiból álló rendszer. A P halmazrendszert G egy **partíciójának** nevezzük, ha $\bigcup_{j \in J} G_j = G$ és $G_j \cap G_k = \emptyset$ minden $j \neq k$ esetén. A G_j részhalmazokat a P partíció **blokkjainak** nevezzük.

2.17. Definíció. Legyen $P_1 = \{A_i \mid i \in I\}$ és $P_2 = \{B_j \mid j \in J\}$ a G halmaz két partíciója. Azt mondjuk, hogy P_1 **finomabb**, mint P_2 (jelölés: $P_1 \leq P_2$), ha P_2 minden egyes blokkja előáll P_1 -beli blokkok egyesítéseként.

2.18. Definíció. Legyen (G, M, I) egy kontextus és $P = \{G_j \mid j \in J\}$ a G egy partíciója. Azt mondjuk, hogy a P partíció a G halmaz egy **extenzió-partíciója**, ha $G_j'' = G_j$ teljesül minden $j \in J$ esetén (azaz a G_j blokkok zártak közös tulajdonságaikra nézve). (Az extenzió-partíciókat adatbányászatban, illetve műszaki alkalmazásokban is gyakran nevezik osztályoknak.)

A definícióból könnyen belátható, hogy extenzió-partíciók metszete is extenzió-partíció. Megkonstruálva az összes extenzió-partíciók metszetét megkapjuk a (G, M, I) kontextus legfinomabb extenzió-partícióját, melyet $\pi_{\square}$ -val jelölünk.

2.19. Definíció. Legyen L egy teljes háló. Az L nemzéró elemeiből álló $S = \{a_j \mid j \in J\}$ rendszert a háló egy **osztályozási rendszerének** nevezzük, ha

1. $a_j \wedge a_k = 0 \quad \forall j \neq k$ esetén,
2. $x = \bigvee_{j \in J} (x \wedge a_j) \quad \forall x \in L$.

A G halmaz extenzió-partíciói és az $\mathcal{L}(G, M, I)$ háló osztályozási rendszerei közötti kapcsolatot az alábbi tételben láthatjuk:

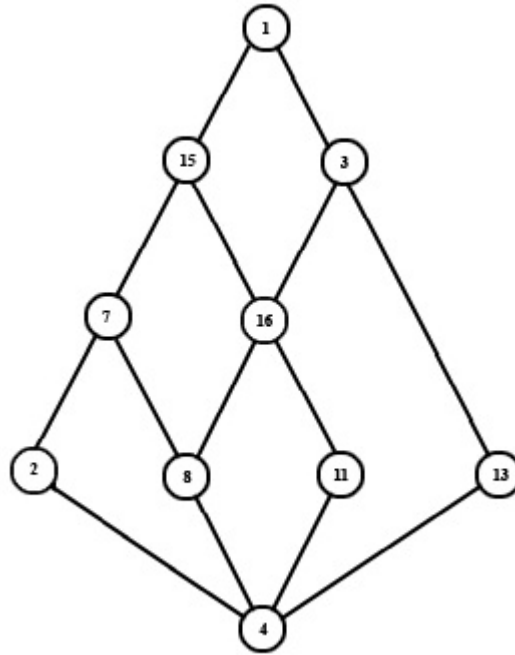
2.20. Tétel. Ha (G, M, I) egy tetszőleges kontextus, és $\{G_j \mid j \in J\}$ a G halmaz egy extenzió-partíciója, akkor a $\{(G_j, G_j') \mid j \in J\}$ rendszer az $\mathcal{L}(G, M, I)$ fogalomháló egy osztályozási rendszere. Megfordítva, ha (G, M, I) egy sor-redukált kontextus és $\{(A_j, B_j) \mid j \in J\}$ az $\mathcal{L}(G, M, I)$

fogalomháló egy osztályozási rendszere, akkor az $\{A_j \mid j \in J\}$ halmazok G egy extenzió-partícióját alkotják.

Megjegyzés: A [36]-ban a 2.20 Tételből kiindulva megmutatták, hogy minden CJ-generált teljes háló mindig tartalmaz egy legkisebb (legfinomabb) osztályozási rendszert.

2.21. Definíció. Az L teljes háló egy a elemét **dobozelemnek** nevezük, ha megegyezik a háló legkisebb 0 elemével vagy a háló valamelyik osztályozási rendszerének eleme. Az L háló dobozelemeinek az összességét $\mathfrak{B}(L)$ -el jelöljük. Az L hálón értelmezett részbenrendezés $\mathfrak{B}(L)$ -re való leszűkítésével a dobozelemek egy hálót alkotnak, melyet az L háló **dobozhálójának** nevezünk.

Az 1. táblázatban szereplő kontextushoz tartozó dobozháló az alábbi ábrán látható:



3. Ábra Dobozháló

2.22. Tétel. Ha L egy CJ-generált teljes háló, akkor $\mathfrak{B}(L)$ egy teljes atomisztikus háló, melynek atomjai a legkisebb osztályozási rendszer elemei.

3. Elemi kontextusbővítés és osztályozási fák

Ennek a fejezetnek a tárgya egy kontextushoz rendelhető olyan speciális osztályozási fának a vizsgálata, amelyek csoporttechnológiai alkalmazások szempontjából relevánsak. A szakirodalom egy fontos felismerése, hogy ezeket az illető kontextushoz tartozó dobozelemek extenzióiból építhetjük fel. A fejezetben először megvizsgáljuk, hogy egy kontextus objektumhalmazának bővítése illetve szűkítése során a kontextushoz tartozó dobozelemek extenziói hogyan változnak. Külön figyelmet fordítunk a kontextusok elemi bővítésére, amikor a kontextust egy elemmel bővítjük, amelynek a tulajdonságai a már meglévő attribútumhalmazból származnak. Ezt a lépést ismételve kiterjeszthető többbelemű bővítésre is.

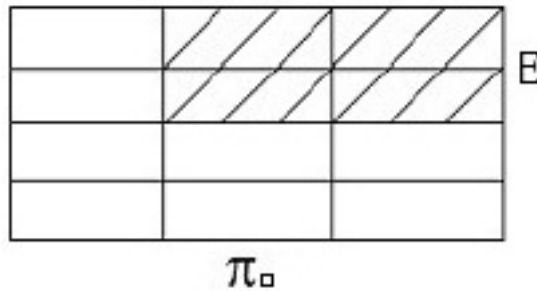
Definiáljuk az osztályozási fa és ún. teljes osztályozási fa fogalmát és megvizsgáljuk, hogyan változik az utóbbi szerkezete a kontextus elemi bővítése során.

3.1. Doboz-extenziók

Első lépésként bemutatjuk azokat a [10]-ből átvett definíciókat és állításokat, tételeket melyek nélkülözhetetlenek az eredményeink ismertetéséhez.

3.1. Definíció. Legyen (G, M, I) egy kontextus. Egy $E \subseteq G$ halmazt **doboz-extenzió**nak nevezünk, ha E a kontextus valamely extenzió-partíciójának egy osztálya vagy $E = \emptyset$. (Könnyen belátható, ha $\emptyset \neq E$, akkor $\{G\}$ a kontextus egyetlen extenzió-partíciója).

3.2. Megjegyzés. Mivel egy tetszőleges π extenzió-partíció bármely osztálya $\pi_{\square}$ (legfinomabb extenzió-partíció) osztályainak az uniója, ezért bármely doboz-extenzió is $\pi_{\square}$ valamely osztályainak az uniója. Megfordítva, ha egy $E \neq \emptyset$ fogalom-extenzió $\pi_{\square}$ valamely osztályainak az uniója, akkor E és $\pi_{\square}$ azon osztályai, amelyek nincsenek E -ben, G -nek egy extenzió-partícióját alkotják.



4. Ábra

Egy $g \in G$ objektum esetén jelöljük $g^{\square\square}$ -val a $\pi_{\square}$ legfinomabb extenzió-partíció azon (egyetlen) osztályát, ami a g elemet tartalmazza (a jelölés magyarázatát lásd a 3.4 Megjegyzésben). Könnyen belátható, hogy $g^{\square\square}$ a legkisebb olyan doboz-extenzió, ami g -t tartalmazza. Mivel $g \in g^{\square\square}$ minden $g \in G$ -re, ezért beláthatjuk, hogy egy $E \neq \emptyset''$ extenzió akkor és csakis akkor doboz-extenzió, ha tetszőleges $g \in G$ esetén

$$g \in E \implies g^{\square\square} \in E,$$

ez pedig ekvivalens azzal, hogy

$$g \notin E \iff g^{\square\square} \cap E = \emptyset.$$

3.3. Állítás. *Doboz-extenziók metszete is doboz-extenzió.*

Egy $K = (G, M, I)$ kontextusból kiindulva definiálunk egy $K_{\square} = (G, M, \square)$ kontextust a következőképpen:

$$g \square m \stackrel{def}{\iff} g^{\square\square} \subseteq m'.$$

3.4. Megjegyzés. Az új $K_{\square} = (G, M, \square)$ kontextus esetén $\square = G \times M$ egy bináris reláció. Vegyük észre, hogy egy tetszőleges $g \in G$ objektum esetén a g -t tartalmazó legkisebb fogalom-extenzió $K_{\square}$ -ben (ami általában, mint a 2. fejezetben is láthattuk $\{g\}''$ -vel jelöltük) valóban a $g^{\square\square}$ halmaz. Csakugyan, mivel minden $(A, B) \in \mathcal{L}(G, M, I)$ fogalom esetén $A = \cap \{m' \mid A \subseteq m'\}$ és mivel $g^{\square\square}$ egy fogalom-extenzió, ezért $g^{\square\square} = \cap \{m' \mid g^{\square\square} \subseteq m'\}$. Másrészt a $K_{\square}$ kontextusban (a $\square$ relációra nézve) $g^{\square} = \{m \in M \mid g \square m\} = \{m \in M \mid g^{\square\square} \subseteq m'\}$, g -t tartalmazó legkisebb $K_{\square}$ -beli fogalom, vagyis a $(g^{\square})^{\square}$ nem más, mint $\{x \in G \mid x \square m \text{ minden } m \in g^{\square}\} =$
 $= \{x \in G \mid x^{\square\square} \subseteq m' \text{ minden olyan } m \in M\text{-re, amire } g^{\square\square} \subseteq m'\} =$
 $= \{x \in G \mid x^{\square\square} \subseteq \cap \{m' \mid g^{\square\square} \subseteq m'\}\} = \{x \in G \mid x^{\square\square} \subseteq g^{\square\square}\} =$
 $= \{x \in G \mid x \in g^{\square\square}\} = g^{\square\square}.$

Az elmondottakból nehézség nélkül levezethető az alábbi tétel:

3.5. Tétel. [10] *A következő kijelentések ekvivalensek:*

- a.) E a K kontextus doboz-extenziója;
- b.) E a K és $K_{\square}$ kontextusnak is extenziója.

Ez annyit jelent, hogy a K kontextus doboz-extenzióinak a zárási rendszere nem más, mint a K és $K_{\square}$ extenziói által alkotott zárási rendszerek metszete. Ezek szerint a $\pi_{\square}$ partíció osztályai a legkisebb (nemzéró) doboz-extenziók lesznek, mitöbb minden doboz-extenzió megkapható ezek uniójaként. Könnyen belátható, hogy egy ilyen unió a hálóelméleti szuprémum is egyben, azaz:

3.6. Következmény. [10] *A K kontextushoz tartozó doboz-elemek egy olyan atomisztikus hálót alkotnak, ahol az atomok nem mások, mint a $\pi_{\square}$ legfinomabb partíció osztályai.*

A legfinomabb extenzió-partíció algoritmikus megkonstruálása részletes vizsgálat tárgya volt [10]-ben. Következő lépésként bemutatunk egy algoritmust [10], amely megadja egy $K = (G, M, I)$ kontextus legfinomabb extenzió-partícióit (itt a legfinomabb extenzió-partíciót $\mathcal{F}$ -el jelöltük):

```

finextpart
begin
   $\mathcal{F} := \{g'' \mid g \in G\}$ 
  While there are  $X, Y \in \mathcal{F}$ ,  $X \neq Y$  with  $X \cap Y \neq \emptyset$ 
    do  $\mathcal{F} = (\mathcal{F} \setminus \{X, Y\}) \cup \{(X, Y)''\}$ ;
end

```

3.2. Egy részkontextushoz tartozó doboz-extenziók

Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk a $K = (G, M, I)$ kontextus extenzió-partíciói és $(G, N, I \cap G \times N)$ illetve $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextusainak extenzió-partíciói közötti kapcsolatot.

Az alfejezetben bemutatott állításokat és következményeket a [10]-es cikkből vettük át, ahol szükséges a bizonyításokat is röviden bemutatjuk.

3.7. Állítás. *A $(G, N, I \cap G \times N)$ részkontextus egy extenzió-partíciója egyben a K kontextusnak is extenzió-partíciója.*

Bizonyítás. Mivel a $(G, N, I \cap G \times N)$ tetszőleges E extenziója egyben extenziója a (G, M, I) kontextusnak is (lásd [9]), ezért az állítás azonnal következik. $\square$

3.8. Következmény. *A $(G, N, I \cap G \times N)$ részkontextus doboz-extenziói egyben a K kontextusnak is doboz-extenziói.*

3.9. Állítás. *Ha $\pi = \{A_k \mid k \in K\}$ a K kontextus egy extenzió-partíciója, akkor*

$$\pi_H = \{A_k \cap H \mid k \in K\} \setminus \{\emptyset\}$$

a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus egy extenzió-partíciója. (Ha π a K kontextus legfinomabb extenzió-partíciója, akkor a leszűkítéssel kapott π_H rendszer a H halmaz egy extenzió-partíciója, de nem feltétlenül a legfinomabb).

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy π_H H -nak egy partíciója és ismert, hogy a (G, M, I) kontextus minden E extenziója esetén $E \cap H$ a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus egy extenziója. Tehát minden $A_k \cap H$ a részkontextus egy extenziója. $\square$

3.10. Következmény. *Ha E a (G, M, I) kontextus doboz-extenziója, akkor $E \cap H$ a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus doboz-extenziója.*

3.11. Állítás. Ha E a (G, M, I) kontextus egy doboz-extenziója, és $H = G \setminus \{z\}$ akkor

- (1) E a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus doboz-extenziója és $E \cap z^{\square\square} = \emptyset$ vagy
- (2) $E \setminus \{z\}$ a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus doboz-extenziója.

Bizonyítás. Az előző következményből rögtön látható, hogy $E \cap H$ a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus doboz-extenziója. Két eset lehetséges:

- (1) Ha $z \notin E$, akkor $E \cap H = E$ és mivel E egy doboz-extenzió, ezért $E \cap z^{\square\square} = \emptyset$.
- (2) Ha $z \in E$ akkor $E \cap H = E \setminus \{z\}$. □

3.12. Megjegyzés. Minden $A \subseteq H$ halmaz esetén $A'' \cap H$ a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus legkisebb olyan extenziója, amely tartalmazza A -t. Ha $H = G \setminus \{z\}$, $z \notin A''$ akkor az extenzió megegyezik A -val.

3.13. Állítás. Legyen $H = G \setminus \{z\}$ és $A \subseteq G$. Az A halmaz pontosan akkor a (G, M, I) kontextus $\pi_{\square}$ legfinomabb extenzió-partíciójának egy blokkja, ha

- (1) vagy $A = z^{\square\square}$
- (2) vagy A a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus legfinomabb extenzió-partíciójának egy $z^{\square\square}$ -től különböző blokkja.

3.3. Elemi kontextusbővítések

Az előző alfejezetben azt vizsgáltuk, hogy a kontextus objektum-részének leszűkítésével kapott részkontextus örökli-e az eredeti kontextus extenzióit, doboz-extenzióit, extenzió-partícióit. A továbbiakban a kontextus elemi bővítésével foglalkozunk, azaz az objektumhalmazt egyetlen elemmel bővítjük, mely elem ugyanabból az attribútumhalmazból rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal, mint az eredeti objektumok.

Legyen (G, M, I) egy kontextus és $(H, M, I \cap H \times M)$ egy részkontextusa. Az eredeti (G, M, I) kontextust a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus **elemi kiterjesztésének** nevezzük, ha létezik olyan $z \in G$ elem amire $H = G \setminus \{z\}$. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a (G, M, I) kontextus doboz-extenzióit megkaphatjuk a $(H, M, I \cap H \times M)$ doboz-extenzióiból.

3.14. Definíció. [10] Legyen (G, M, I) egy kontextus. Azt mondjuk, hogy $P \subseteq H = G \setminus \{z\}$ objektumhalmaz a $z \in G$ objektum egy **premisszája**, ha $z \in P''$.

3.15. Tétel. [10] Ha $H = G \setminus \{z\}$, akkor a z elemet tartalmazó $E \subseteq G$ halmaz pontosan akkor doboz-extenziója a (G, M, I) kontextusnak, ha a következő feltételek teljesülnek:

- (1) E a (G, M, I) kontextus egy olyan extenziója, amely tartalmazza z -t,
- (2) $E \setminus \{z\}$ a $(H, M, I \cap H \times M)$ egy doboz-extenziója,
- (3) E tartalmazza a $(H, M, I \cap H \times M)$ legfinomabb extenzió-partícióinak minden olyan blokkját, ami z -nek premisszája.

Vezessük be a $P_z^\cup$ jelölést a $(H, M, I \cap H \times M)$ azon legfinomabb extenzió-partícióinak az uniójára, amelyek tartalmazzák z -t.

3.16. Következmény. [10] Az $E = z^{\square\square}$ halmaz a (G, M, I) kontextus legkisebb olyan doboz-extenziója, amelyre egyszerre teljesül a $P_z^\cup \cup \{z\} \subseteq E$ tulajdonság és az, hogy $E \setminus \{z\}$ a $(H, M, I \cap H \times M)$ egy doboz-extenziója.

3.17. Következmény. [10] Az $\{z\}$ halmaz pontosan akkor a (G, M, I) kontextus doboz-extenziója, ha $\{z\}'' = \{z\}$ és $P_z^\cup = \emptyset$. Ebben az esetben $z = z^{\square\square}$.

Az elmondottak alapján a (G, M, I) kontextus minden doboz-extenziója vagy a szűkebb $(H, M, I \cap H \times M)$ kontextus egy doboz-extenziója, vagy $E \cup \{z\}$ alakú, ahol $\{z\} = G \setminus H$, E a $(H, M, I \cap H \times M)$ doboz-extenziója. Hogy mikor melyik eset következhet be, erre ad választ az alábbi tétel:

3.18. Tétel. [10] Legyen (G, M, I) egy kontextus, és E a $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus egy doboz-extenziója, ahol $H = G \setminus \{z\}$. Ekkor igazak az alábbi kijelentések

- (i) E akkor és csak akkor a (G, M, I) doboz-extenziója, ha $z^{\square\square} \cap E'' = \emptyset$;
- (ii) $E^* = E \cup \{z\}$ akkor és csak akkor doboz-extenziója a (G, M, I) kontextusnak, ha $z^{\square\square} \setminus \{z\} \subseteq E$ és $(E \cup \{z\})'' = E \cup \{z\}$.

A következőkben bemutatunk két algoritmust a [10] cikkből amelyet felhasználunk az alkalmazásaink során. Az algoritmusoknál az eredeti jelöléseket használjuk, így például a $E_{old} := E$ értékadás a mi jelöléseinkkel $E_{old} \leftarrow E$ lenne.

1. Algoritmus Az algoritmus célja megkeresni azt az $E := z^{\square\square}$ osztályt, amelyik tartalmazza a $\mathbb{K} = (G, M, I)$ kontextus legfinomabb extenzió-partíciójának egy z elemét. Ismertnek tekintjük a $\mathbb{K}$ kontextus $\mathbb{K}_0 = (H, M, I \cap H \times M)$ részkontextusának legfinomabb $\{h^{**} \mid h \in H\}$, $H = G \setminus \{z\}$ extenzió-partícióját.

begin

$E := \{z\}$;

for $h \in H$ *do if* $z \in (h^{**})''$ *then* $E := E \cup h^{**}$;

repeat

$ready := TRUE$;

$E_{old} := E$;

```


$$E := (E_{old})'';$$

for  $h \in E \setminus E_{old}$  do
  if  $h^{**} \subsetneq E$  then
     $E := E \cup h^{**};$ 
     $ready := FALSE;$ 
  }
until ready;
end

```

2. Algoritmus A 3.18. Tétel alapján algoritmust konstruáltunk egy elemi kontextusbővítés doboz-extenzióinak az előállítására (ismertnek tételezve fel az eredeti, szűkebb kontextus doboz-extenzióit, melyeket az $\mathbb{S}$ listában tárolunk).

```

begin
   $\mathbb{L} := \{z^{\square\square}\};$ 
  for  $E \in \mathbb{S}$  do
    if  $E'' \cap z^{\square\square} = \emptyset$  then  $\mathbb{L} := \mathbb{L} \cup \{E\};$ 
    if  $z^{\square\square} \setminus \{z\} \subseteq E$  then  $E^* := E \cup \{z\};$ 
    if  $(E^*)'' = E^*$  then  $\mathbb{L} := \mathbb{L} \cup \{E^*\};$ 
  }
end

```

3.4. Osztályozási fák és CD-independens halmazok

Ebben az alfejezetben definiálom az osztályozási fa fogalmát, és megvizsgáljuk az osztályozási fa és egy háló CD-independens halmazai közötti szoros kapcsolatot. A fejezet végén bemutatunk egy algoritmust, amely egy doboz-extenzió háló osztályozási fáit ún. ortogonális elemrendszerek segítségével konstruálja meg.

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, melynek van legnagyobb eleme $1 \in P$ és legyen $T \subseteq P$, $T \neq \emptyset$ egy részhalmaza. Tekintsük az alábbi feltételeket:

$$[t) \cap T \text{ lánc bármely } t \in T\text{-re;} \quad (1)$$

$$[x) \cap T \text{ (nemüres) lánc bármely } x \in P \setminus \{0\}\text{-ra.} \quad (2)$$

3.19. Definíció. (i) A T halmazt **irányított erdőnek** nevezzük, ha teljesíti az (1) feltételt. T **irányított fa**, ha irányított erdő és $1 \in T$ is teljesül.

(ii) T -t **osztályozási fának** nevezzük, ha teljesíti a (2) feltételt és $1 \in T$. T **maximális osztályozási fa**, ha nem valódi részhalmaza egyetlen más osztályozási fának sem.

Példák: A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmazban minden $1 \in P$ elemet tartalmazó lánc egy osztályozási fa. Nyilvánvalóan minden osztályozási fa egy irányított fa is egyben. Ha $a, b \in P$, $a \neq b$ egy antilánc, akkor

$\{a, b, 1\}$ egy irányított fa, azonban ha $\{a, b\}$ -nek van 0-tól különböző alsó korlátja P -ben akkor $\{a, b, 1\}$ nem osztályozási fa.

3.20. Megjegyzés. A definíciókból azonnal következik hogy egy irányított erdő (irányított fa, osztályozási fa) minden az 1 elemet tartalmazó részhalmaza ugyancsak irányított erdő (irányított fa, osztályozási fa).

Egy 0-elemes $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz tetszőleges $a, b \in P$ eleme esetén jelöljük $a \wedge b$ -vel $\inf\{a, b\}$ -t (a és b legnagyobb alsó korlátját), amennyiben az létezik. P egy nemüres H részhalmazát a $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz egy $\wedge$ -részfélhálójának nevezzük, ha minden $a, b \in H$ -ra $a \wedge b$ létezik $(P, \leq)$ -ben és $a \wedge b \in H$.

Vezessük be most a $\rho \subseteq P^2$ relációt a következőképpen: bármely $a, b \in P$ -re

$$a\rho b \iff a \leq b \text{ vagy } b \leq a \text{ vagy } a \wedge b = 0.$$

Könnyen belátható, hogy ρ reflexív és szimmetrikus, vagyis egy úgynevezett **tolerancia reláció**.

3.21. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $B \subseteq P$ és R egy tolerancia reláció B -n, akkor:

- (i) B -t **tolerancia előosztálynak** nevezzük, ha minden $x, y \in B$ -re xRy .
- (ii) B tolerancia előosztályt **tolerancia osztálynak** nevezzük, ha B maximális az előző tulajdonságra nézve, azaz minden egyéb $z \notin B$ -re létezik $b \in B$ úgy, hogy $(z, b) \notin R$.

A következő tétel az előbbieken bevezetett fogalmak szoros kapcsolatát mutatja be:

3.22. Tétel. Legyen $(P, \leq)$ egy korlátos részbenrendezett halmaz és $T \subseteq P$ egy nemüres részhalmaza. Akkor ekvivalensek az alábbi állítások:

- (i) T egy irányított fa és $T \cup \{0\}$ $\wedge$ -részfélhálójá $(P, \leq)$ -nek;
- (ii) T egy osztályozási fa;
- (iii) T egy ρ előosztály, amely tartalmazza az 1-elemet.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii) Tegyük fel hogy (i) teljesül. Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy T osztályozási fa, elég megmutatnunk, hogy minden $x \in P \setminus \{0\}$ -ra $[x] \cap T = \{t \in T \mid t \geq x\}$ egy lánc.

Legyen $t_1, t_2 \in T$ és $t_1, t_2 \geq x$ tetszőleges. Akkor $t_1 \wedge t_2 = 0$ nem lehetséges és mivel $t_1 \wedge t_2 \in T \cup \{0\}$, ezért $t_1 \wedge t_2 = t \in T$. Mivel $t_1, t_2 \in [t] \cap T$, ezért t_1 és t_2 összehasonlítható, így $\{t \in T \mid t \geq x\}$ egy lánc.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Legyen T egy osztályozási fa $(P, \leq)$ -ben. Bebizonyítjuk, hogy T bármely két eleme ρ relációban van. Legyen $a, b \in T$.

Ha $a \wedge b = 0$, akkor $a\rho b$.

Ha $a \wedge b = c \neq 0$, akkor $a, b \geq c$ és így $a, b \in [c] \cap T$, ezért a (2) tulajdonság alapján a és b összehasonlítható kell legyen. Tehát ismét azt kapjuk, hogy $a \rho b$. Mivel T osztályozási fa ezért $1 \in T$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Tegyük fel most, hogy T egy ρ tolerancia előosztály, ami tartalmazza az 1 elemet. Akkor minden $a, b \in T$ -re $a \wedge b$ létezik és $a \wedge b \in \{a, b, 0\} \subseteq T \cup \{0\}$. Tehát $T \cup \{0\}$ egy $\wedge$ -részfélháló $(P, \leq)$ -ben. Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy T irányított fa, elég belátnunk hogy minden $t \in T$ -ra $[t] \cap T = \{x \in T \mid x \geq t\}$ egy lánc.

Legyen $x_1, x_2 \in T$ úgy, hogy $x_1, x_2 \geq t$. Akkor $x_1 \wedge x_2$ nem lehet 0. Mivel T egy ρ tolerancia előosztály, ezért $x_1 \rho x_2$, amiből $x_1 \geq x_2$ vagy $x_2 \geq x_1$ következik. Tehát $\{x \in T \mid x \geq t\}$ egy lánc. $\square$

Egy $(P, \leq)$ 0-elemes részbenrendezett halmaz egy $a \in P$ elemét **atom-nak** nevezzük, ha a a 0 elem rákövetkezője, vagyis $0 \prec a$. A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz atomjainak az összeségét $A(P)$ -vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $A(P)$ minden ρ tolerancia osztálynak részhalmaza. Így a 3.22 Tételből azonnal adódik az alábbi következmény

3.23. Következmény. *Legyen $(P, \leq)$ egy 0-elemes részbenrendezett halmaz és $T \subseteq P$ egy osztályozási fa $(P, \leq)$ -ben.*

(i) *Ha $S \subseteq A(P)$, akkor $T \cup S$ is egy osztályozási fa.*

(ii) *Ha T egy maximális osztályozási fa, akkor $A(P) \subseteq T$.*

Az alábbi definíciót Czédli Gábor vezette be [5] cikkében.

3.24. Definíció. Legyen L egy háló, amely tartalmaz legkisebb 0 elemet. Egy X részhalmazát L -nek **CD-independensnek** nevezzük, ha bármely $x, y \in X$ -re $x \leq y$ vagy $y \leq x$ vagy $x \wedge y = 0$. Azaz bármely két eleme X -nek összehasonlítható (angolul comparable) vagy diszjunkt (disjoint), innen ered az elnevezése a halmaznak. A maximális CD-independens részhalmazokat **CD-bázisoknak** nevezzük.

3.25. Megjegyzés. A fenti definícióból azonnal következik, hogy egy L háló minden $X \subseteq L$ CD-independens halmaza egy ρ előosztály.

3.26. Állítás. *Legyen L egy korlátos háló, amelynek legkisebb elemét 0-val jelöljük és $T \subseteq P$ egy nemüres részhalmaza. Akkor ekvivalensek az alábbi állítások:*

(i) *T egy CD-bázis L -ben;*

(ii) *T a ρ reláció egy tolerancia osztálya;*

(iii) *T egy maximális osztályozási fa.*

Bizonyítás. A 3.25 Megjegyzés alapján az (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ekvivalencia nyilvánvaló.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Legyen T a ρ tolerancia egy osztálya. Akkor $1 \in T$, mert 1-et minden ρ tolerancia osztály tartalmazza. Így a 3.22 Tételnek megfelelően T egy osztályozási fa. Legyen most V egy olyan osztályozási fa ami tartalmazza T -t. Akkor $1 \in V$ és így a 3.22 Tétel

értelmében V egy ρ tolerancia előosztály. Mivel T tolerancia osztály és $T \subseteq V$, ezért $T = V$. Tehát T egy maximális osztályozási fa.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Nyilvánvaló, mivel minden osztályozási fa egy tolerancia előosztály és minden tolerancia osztály nem más mint egy maximális tolerancia előosztály. $\square$

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $(P, P, \leq)$ a hozzá tartozó kontextus és $\mathcal{L}(P, P, \leq)$ a kontextushoz tartozó fogalomháló. Ismert tény, hogy $\mathcal{L}(P, P, \leq)$ a $(P, \leq)$ -t tartalmazó „legsűrűbb” teljes hálóval, vagyis $(P, \leq)$ Dedekind-MacNeille-féle lezárásával izomorf. (lásd [3]) Vagyis létezik $\varphi : (P, \leq) \rightarrow (\mathcal{L}(P, P, \leq), \leq)$ úgy, hogy

$$a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b) \text{ és } \varphi(x) = ([x], [x]) \text{ minden } x \in P\text{-re.}$$

3.27. Tétel. ([V3]) *Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz és $T \subseteq P$ egy osztályozási fa, akkor $\varphi(T)$ egy osztályozási fa az $(\mathcal{L}(P, P, \leq), \leq)$ fogalomhálóban is.*

Bizonyítás. Elég megmutatnunk, hogy $\varphi(T)$ egy az $\mathcal{L}(P, P, \leq)$ háló legnagyobb elemét tartalmazó ρ előosztály.

Az $\mathcal{L}(P, P, \leq)$ fogalomháló legnagyobb eleme $\varphi(1) = (P, 1)$. Mivel $1 \in T$ következik, hogy $\varphi(1) \in \varphi(T)$.

Legyen most $b = \varphi(u) = ([u], [u]) \in \varphi(T)$ és $c = \varphi(v) = ([v], [v]) \in \varphi(T)$ tetszőleges. Ha $b \wedge c = (0, P)$ ami az $\mathcal{L}(P, P, \leq)$ zéruseleme, akkor $b \rho c$ és kész vagyunk. Tegyük fel, hogy $b \wedge c \neq 0$ akkor $u \wedge v \neq 0$. Mivel $u, v \in T$, $u \wedge v \neq 0$ csak úgy lehetséges, ha vagy $u \leq v$ vagy $v \leq u$. De akkor $b = \varphi(u) \leq \varphi(v) = c$ vagy $c = \varphi(v) \leq \varphi(u) = b$. Tehát minden esetben a $b \rho c$ eredményt kapjuk, így $\varphi(T)$ egy ρ előosztály. $\square$

3.28. Definíció. Legyen L egy teljes háló, amely tartalmazza a legkisebb 0 elemet is. L nemzéró elemeinek az $O = \{a_i \mid i \in I\}$, $I \neq \emptyset$ halmazát L **ortogonális rendszerének** nevezzük, ha $a_i \wedge a_j = 0$, $i \neq j$. O egy **teljes ortogonális rendszer**, ha nem létezik olyan ortogonális rendszer, amely őt tartalmazza (azaz nem lehet nemzéró elemmel bővíteni úgy, hogy osztályozási rendszer maradjon).

3.29. Definíció. Legyen L egy teljes háló, amely tartalmazza a 0 elemet és $S_1 = \{a_i \mid i \in I\}$, $I \neq \emptyset$, $S_2 = \{b_j \mid j \in J\}$, $J \neq \emptyset$ két ortogonális rendszer. Ekkor $S_1 \stackrel{def}{\leq} S_2$, ha minden $i \in I$ -re létezik $j(i) \in J$ úgy, hogy $a_i \leq b_{j(i)}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\leq$ egy részbenrendezés. Jelöljük az L háló ortogonális rendszereinek összességét $Ort(L)$ -el. Könnyen belátható, hogy az ortogonális rendszerek halmaza az előbb értelmezett részbenrendezéssel egy hálót alkot, $(Ort(L), \leq)$ szintén egy háló.

3.30. Megjegyzés. (i) Jelölje 0 az L teljes háló legkisebb elemét és 1 a legnagyobb elemét (ismert tény, hogy minden teljes háló korlátos is egyben), akkor $S_0 = \{0\}$ a legkisebb, $S_1 = \{1\}$ pedig a legnagyobb ortogonális rendszer L -ben. Tehát $(Ort(L), \leq)$ egy korlátos háló.

(ii) Jelölje $A(L)$ egy véges háló atomjainak a halmazát. Könnyen látható, hogy $A(L)$ egy teljes ortogonális rendszer, mi több, [15]-ben a szerzők igazolták, hogy L egy O ortogonális rendszere pontosan akkor teljes, ha $A(L) \leq O$.

A [V10] illetve a [15] cikkekben bizonyítást nyert a következő tétel:

3.31. Tétel. *Legyen L véges háló és T egy osztályozási fa L -ben. Akkor*

- (i) *T -hez található egy olyan $\mathcal{C} = \{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ lánc $\text{Ort}(L)$ -ben, amelyre $T = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$. (lásd [V4])*
- (ii) *Ha T egy CD -bázis (azaz egy maximális osztályozási fa), akkor $\mathcal{C}$ egy maximális lánc $\text{Ort}(L)$ -ben és $|T| = |\mathcal{C}|$. (lásd [15])*

A 3.31 Tétel (i) pontját felhasználva programot írtunk osztályozási fák megkonstruálására a dobozhálóban. Azért választottuk a speciálisabb dobozhálót, mivel a következő fejezetben bemutatott alkalmazásunk ezt követeli meg. A teljes program több algoritmusból épül fel, minden algoritmus mellett feltüntettük az algoritmusok hatékonyságvizsgálatát is. Az első algoritmusnál részletesen bemutatjuk a hatékonyságvizsgálat kiszámítását, a további algoritmusoknál csak a végeredményt írtuk le. A program bemeneti adatait a [29]-ben található DOBOZ algoritmussal kaptuk meg.

A KTSUM eljárás bemenete a DS mátrix, melyben a doboz-extenziókat tároljuk, olyan módon, hogy soronként a doboz-extenziókat tároljuk (m darab), oszlopai pedig az objektumoknak felelnek meg (n darab). Ha a j -edik doboz-extenzió tartalmazza az i -edik objektumot, akkor $DS[j][i] = 1$, különben 0. Felhasználjuk továbbá a kontextus mátrixot, melynek sorai lesznek az objektumok (n darab), oszlopai pedig a tulajdonságok (k darab), ha az i -edik objektum rendelkezik a l -edik tulajdonsággal, akkor $K[i][l] = 1$, különben 0. Ezeket a bemeneti adatokat felhasználva a KTSUM eljárás megszámlolja minden egyes doboz-extenzió közös tulajdonságainak a számát és ezt a doboz-extenziókhoz rendeli hozzá úgy, hogy egy új oszlopot rendelünk a DS mátrixhoz ($n + 1$ -edik oszlop), amelyben a közös tulajdonságok számát tároljuk.

$KTSUM(DSmX(n + 1))$

1. *for* $j \leftarrow 1$ *to* m
2. *do* *for* $l \leftarrow 1$ *to* k
3. *do* $g[l] \leftarrow 1$
4. *for* $i \leftarrow 1$ *to* n
5. *do if* $DS[i][j] = 1$
6. *then for* $l \leftarrow 1$ *to* k
7. *do if* $g[l] > K[i][l]$
8. *then* $g[l] \leftarrow 0$
9. $DS[j][n + 1] \leftarrow 0$

9. *for* $l \leftarrow 1$ *to* k
10. *do* $DS[j][n+1] \leftarrow DS[j][n+1] + g[l]$

Megjegyzés. A KTSUM eljárás áll egy m lépésszámú ciklusból, melyben további három, rendre k , n és újból k lépésszámú ciklus van. Az első és utolsó ciklus összesen egy lineáris utasítást hajt végre ($k+k$ időigény), míg a középső ciklus egy döntés, abban egy ciklus és újabb döntésből egy értékadást hajt végre, ezek lineáris utasítások. Összeszámolva tehát az algoritmus időigénye $m * k * n * k$, azaz maximálisan $O(n^2 k^2)$.

Ezek után meghívjuk a RENDEZ eljárást, mely a DS mátrixunkban soronként tárolt doboz-extenziókat a közös tulajdonságaiknak megfelelően növekvő sorrendbe rendezi a sorindex növekedésének irányában (soronként lefelé haladva). A legrosszabb eset, ha a program mag minden esetben végre van hajtva, ez $3(n+1)$ lépés, mivel két sorvektor cseréjét egy segédváltozóval hajtjuk végre. A dupla *for* ciklus lépésszáma $\frac{(m-1)m}{2}$, a teljes futási idő pedig ezek szorzata. Tehát összességében a futási idő $O(m^2 n)$.

RENDEZ($DSmX(n+1)$) /* Futási ideje lineáris, $O(m^2 n)$

1. *for* $j \leftarrow 1$ *to* $m-1$
2. *do for* $i \leftarrow j+1$ *to* m
3. *do if* $DS[j][n+1] > DS[i][n+1]$
4. *then* $DS[j] \longleftrightarrow DS[i]$ /* sorvektorok cseréje
5. *return*

Az ORTOFA eljárás megad egy gyök (gyökér) mutatót, melyből kiindulva egy ortogonális rendszerekből alkotott fán mehetünk végig. A fa tárolására használt mutató szerkezete:

- $p[adat]$, egy n hosszúságú vektor, ebben tárolom a doboz-extenziót
- $p[elozo]$ egy mutató, amely azt mutatja, ki az őt megelőző, tehát a nagyobb elem
- $p[gyerek]$ egy számláló, amely azt mutatja, hogy hány ortogonális ágra osztozik az adott doboz-extenzióból a fánk a továbbiakban
- $p[kov_i]$ az i -edik elágazásban a következő elembe vezető mutató

Az eljárásban a FUZ eljárást hívjuk meg a gyökér mutatónkra és az eddigi összes dobozeleműnkre.

ORTOFA(DS)

1. $D \leftarrow DS$
2. $gyok \leftarrow new$
3. $gyok[adat] \leftarrow 1E$ /* $1E(1Xn) \leftarrow [1,1,\dots,1]$
4. $gyok[elozo] \leftarrow nil$
5. $gyok[gyerek] \leftarrow 0$
6. $FUZ(gyok, D, m)$

7. retrurn gyok

A FUZ egy rekurzív algoritmus, amely a következőképpen működik: Paraméterében egy mutató (pf) van, ami egy aktuális csomópontot jelöl illetve az a mátrix van, amelyből a továbbiakban építhetjük a fát. Ha talál egy a meghívott doboz-extenzióra rákövetkezőt (ezt vizsgálja a BENNE függvény), akkor ezt felveszi a fába (pm - mostani mutatóba). Innen két irányba mehetünk tovább. Vannak azok a doboz-extenziók, amik benne vannak az aktuális doboz-extenziókban (B mátrix) és vannak olyanok, amik ortogonálisak azzal (ha vannak), ezeket az A mátrixban gyűjtjük össze. Innentől kezdve meghívjuk külön-külön a két ágra a FUZ algoritmust ismételten, egészen addig, amíg a halmazosztás nem ad további eredményt, tehát elérünk arra a szintre, hogy sem alá, sem mellé nem kerül több elem, amennyiben alá nem kerül több, úgy azt lekötjük a 0-ra, tehát a rákövetkező mutató értéke üres (nil).

A FUZ algoritmus egy rekurzív algoritmus, magja lineáris idejű, mivel csak lineáris utasításokat tartalmaz, ugyan tartalmaz egy elől tesztelő ciklust, ám az csak egy egyszerű keresés, melyben visszalépés nincs, így ez is lineárisnak tekintendő. Az alapprogramunk $O(m^2)$ futási idejű. Ami a rekurzivitást illeti, a továbblépés feltétele egy halmaz folyamatos szűkítése és felosztása, amíg marad adatunk. Tehát a program futási ideje $O(m^{2 \log m})$.

$FUZ(pf, D, m)$ */ pf mutató, D ($m \times n$) mátrix, m természetes szám

1. $A \leftarrow 0$ */ $A(m \times n)$ mátrix
2. $B \leftarrow 0$ */ $B(m \times n)$ mátrix
3. $i \leftarrow 0$
4. $nincs \leftarrow true$
5. *while* ($i < m$) *and* $nincs$
6. *do* $i++$
7. *if* $BENNE(D[i], p[adat])$
8. *then* $nincs \leftarrow false$
9. $pm \leftarrow new$
10. $pm[elozo] \leftarrow pf$
11. $pf[gyerek]++$
12. $pf[kov_{pf[gyerek]}] \leftarrow pm$
13. $pm[adat] \leftarrow D[i]$
14. $pm[gyerek] \leftarrow 0$
15. $ma \leftarrow 0$
16. $mb \leftarrow 0$
17. *for* $j \leftarrow i + 1$ *to* m
18. *do if* $ORTO(D[j], pm[adat])$
19. *then* $BERAK(A, D[j], ma)$
20. *if* $BENNE(D[j], pm[adat])$

```

21.                                     then BERAK( $B, D[j], mb$ )
22.             if  $mb = 0$ 
23.                 then  $pm[gyerek] ++$ 
24.                      $pm[kov_{pm[gyerek]}] \leftarrow nil$ 
25.                 else  $FUZ(pm, B, mb)$ 
26.             if  $ma > 0$ 
27.                 then  $FUZ(pf, A, ma)$ 
28. return

```

Kisebb algoritmusokba írtunk ki néhány függvényt, így például:

$BENNE(A, B)$ - függvény ami azt mondja meg, hogy az A vektorban tárolt doboz-extenzió tartalmazza-e a B -ben tároltat;

$ORTO(A, B)$ - függvény, ami azt vizsgálja, hogy az A illetve a B vektorban tárolt doboz-extenziók metszete zérus-e;

$BERAK(A, V, m)$ - eljárás, amely az A mátrixba új sorként beilleszti a V vektort, $m + 1$ -edik sorként.

```

BENNE( $A, B$ )                                */ Futási ideje lineáris,  $O(n)$ 
1. bent  $\leftarrow true$ 
2. for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
3.     do if  $A[i] > B[i]$ 
4.         then bent  $\leftarrow false$ 
5. return bent

```

```

ORTO( $A, B$ )                                */ Futási ideje lineáris,  $O(n)$ 
1. ort  $\leftarrow true$ 
2. for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
3.     do if  $A[i] = B[i]$ 
4.         then ort  $\leftarrow false$ 
5. return ort

```

```

BERAK( $A, V, m$ )                            */ Futási ideje lineáris,  $O(n)$ 
1.  $m ++$ 
2. for  $t \leftarrow 1$  to  $n$ 
3.     do  $A[m][t] \leftarrow V[t]$ 
4. return  $A, m$ 

```

Mint érdekes körülményt megjegyeznénk azt a tényt, hogy bizonyos, az L hálóra vonatkozó feltételek mellett, L CD-bázisai egyenlő elemszámúak.

A továbbiakban bemutatok egy tételt amely megad két olyan, a disztributív hálókat általánosító hálóosztályt, ahol a CD-bázisok egyenlő elemszámúak. Először meg kell ismernünk néhány fogalmat:

3.32. Definíció. (i) Legyen L egy 0 elemes háló. Egy $a, b \in L$ elempárost **disztributív párosnak** nevezünk, ha minden $c \in L$ esetén

$c \vee (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$. Azt mondjuk, hogy az L háló **dp-disztributív**, ha minden $a, b \in L$ pár amire $a \wedge b = 0$ teljesül, egy disztributív páros.

(ii) Egy L hálót **modulárisnak** nevezünk, ha bármely $x, y, z \in L$ elemekre teljesül $x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = (x \vee (y \wedge z))$.

(iii) L -t **gyengén modulárisnak** nevezzük, ha minden $a \in L$, $a \neq 0$ esetén az $[a]$ főideálja egy moduláris háló.

(iv) L -t **fokszámozott hálónak** nevezzük, ha L -ben minden maximális lánc azonos hosszúságú.

A következőkben bevezetünk egy feltételt (lásd [15]), amelyet a tételünkben fogunk használni:

ha $a \wedge b \neq 0$, akkor $(x \leq a \vee b \text{ és } x \wedge a = 0) \implies x \leq b$, minden $a, b, x \in L$ -re. (*)

3.33. Tétel. ([15]) (i) Egy dp -disztributív L háló CD -bázisai pontosan akkor egyenlő elemszámúak, ha L fokszámozott háló.

(ii) Ha L egy olyan véges, gyengén moduláris háló, amely teljesíti a (*) feltételt, akkor CD -bázisai egyenlő elemszámúak.

3.5. Osztályozási fák a doboz-extenziók hálójában

A következőkben egy adott $K = (G, M, I)$ kontextushoz tartozó doboz-extenzió hálóban fogunk maximális osztályozási fákat vizsgálni, valamint megvizsgáljuk azt, hogy ezek az osztályozási fák hogyan módosulnak egy elemi kontextusbővítés esetén. Ezt a vizsgálatot a 3.35 Állítás indokolja, amely megmutatja a csoporttechnológiában releváns osztályozási fák és egy megfelelően választott doboz-extenzió háló osztályozási fái közötti szoros kapcsolatot.

Az osztályozási fa fogalma a Csoporttechnológiában is megjelenik, ahol G műszaki objektumokat (alkatrészeket), M ezek lehetséges tulajdonságainak listáját, I pedig az objektumok és tulajdonságaik közötti megfeleltetést jelölik. Az értekezés terminológiáját használva azt mondhatjuk, hogy a Csoporttechnológiában osztályozási fa alatt a fenti K kontextushoz tartozó extenziókból álló olyan osztályozási fákat értenek, amelyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy minden belőlük kiválasztható maximális antilánc a G halmaz egy lefedését jelenti fogalom-extenziókkal. Ennek alapján kézenfekvő a következő definíció:

3.34. Definíció. Egy $\mathcal{T} \subseteq \text{Ext}(G, M, I)$ osztályozási fát **teljes osztályozási fának** nevezünk, ha minden maximális $\{E_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ antilánc esetén $\bigcup_{i \in I} E_i = G$. Ha ezenfelül $\mathcal{T}$ nem valódi részhalmaza egyetlen teljes osztályozási fának sem, akkor **maximális teljes osztályozási fának** nevezzük.

Azonnal észrevehető, hogy egy ilyen $\mathcal{T}$ teljes, azaz „csoporthnologiai”, osztályozási fa minden eleme egy doboz-extendzió, vagyis $\mathcal{T}$ valójában a doboz-extendziók hálójából kiválasztott osztályozási fa.

3.35. Állítás. Legyen (G, M, I) egy véges kontextus, $\text{Ext}(G, M, I)$ a kontextushoz tartozó extendziók hálójája és $\mathcal{B}(G, M, I)$ pedig a hozzá tartozó doboz-extendziók hálójája. Ekkor ekvivalensek a következő állítások:

- (i) $\mathcal{T} \subseteq \text{Ext}(G, M, I)$ egy teljes osztályozási fa;
- (ii) $\mathcal{T}$ egy osztályozási fa $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben és minden maximális $\{E_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ antilánc egy teljes ortogonális rendszer $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben.

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii) Lássuk be először, hogy $\mathcal{T}$ osztályozási fa a doboz-extendziók hálójában $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben. Mivel $\mathcal{B}(G, M, I)$ részfelhálójája $\text{Ext}(G, M, I)$ -nek és tartalmazza $\text{Ext}(G, M, I)$ zérus elemét ($\emptyset$), ezért elegendő annyit megmutatni, hogy minden $A \in \mathcal{T}$ doboz-extendzió. Mivel K véges, ezért A biztosan eleme egy $\{E_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ maximális antiláncnak, azaz $A = E_k$, valamilyen $k \in I$ -re. Mivel egy antilánc nem összehasonlítható elemekből áll, ezért minden $i, j \in I$ -re $E_i \cap E_j = \emptyset$ mert $E_i, E_j \in \mathcal{T}$ és $\mathcal{T}$ egy osztályozási fa $\text{Ext}(G, M, I)$ -ben. Másrészt, $\bigcup_{i \in I} E_i = G$, mert $\mathcal{T}$ teljes. Ez azt jelenti, hogy $\{E_i \mid i \in I\}$ egy extendziópartíciója G -nek. Tehát $A = E_k$ egy doboz-extendzió. Az elmondottakból az is következik, hogy minden maximális E_i , $i \in I$ antilánc része egy ortogonális rendszernek, így maga is ortogonális rendszer. Nyilván ez az ortogonális rendszer nem bővíthető egy újabb $E_0 \in \mathcal{B}(G, M, I)$, $E_0 \neq \emptyset$ elemmel, mert akkor $E_i \cap E_0 = \emptyset$ minden $i \in I$ -re, ahonnan következik, hogy $E_0 = G \cap E_0 = \left(\bigcup_{i \in I} E_i \right) \cap E_0 = \emptyset$, ami lehetetlen.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ha $\mathcal{T}$ osztályozási fa $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben, akkor nyilvánvalóan osztályozási fa $\text{Ext}(G, M, I)$ -ben is. Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, akkor elegendő azt bizonyítanunk, hogy minden $\{E_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ maximális antilánc esetén $\bigcup_{i \in I} E_i = G$. Az (ii) feltétel szerint $\{E_i \mid i \in I\}$ egy teljes ortogonális rendszer. Legyen $g \in G$ és $g^{\square\square}$ a hozzá tartozó doboz-extendzió. A fentiek alapján $\{E_i \mid i \in I\} \cup g^{\square\square}$ nem ortogonális rendszer, azaz $g^{\square\square} \cap E_k \neq \emptyset$ valamilyen $k \in I$ -re. Mivel $g^{\square\square}$ atom a doboz-extendziók hálójában, ebből következik, hogy $g^{\square\square} \subseteq E_k$. Tehát azt kapjuk, hogy $G \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$. Mivel tudjuk, hogy $\bigcup_{i \in I} E_i \subseteq G$, ezért $\bigcup_{i \in I} E_i = G$ teljesül. $\square$

3.36. Következmény. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(G, M, I)$ akkor és csakis akkor maximális osztályozási fa a $\mathcal{B}(G, M, I)$ dobozhálóban, ha $\mathcal{T}$ maximális teljes osztályozási fa az $\text{Ext}(G, M, I)$ hálóban.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{T}$ egy maximális osztályozási fa $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben. Akkor $\mathcal{T}$ a $\mathcal{B}(G, M, I)$ háló minden atomját tartalmazza. Legyen S egy maximális antilánc $\mathcal{T}$ -ben. Mivel $\mathcal{T}$ a ρ tolerancia egy osztálya, ezért S

ortogonális rendszer. Megmutatjuk, hogy S egy teljes ortogonális rendszer. A 3.30 Megjegyzés (ii) értelmében ehhez elég azt belátni, hogy $A(\mathcal{B}(G, M, I)) \leq S$. Valóban, ha az utóbbi egyenlőtlenség nem teljesülne, az azt jelentené hogy a $\mathcal{B}(G, M, I)$ hálónak van olyan a atomja ami S egyetlen elemétől sem kisebb. Mivel a 3.23 Következmény szerint $a \in \mathcal{T}$, ezért ez azt eredményezné, hogy $S \cup \{a\}$ is egy antilánc $\mathcal{T}$ -ben, ami ellentmondás. Tehát $A(\mathcal{B}(G, M, I)) \leq S$ teljesül és így S egy teljes ortogonális rendszer. Ezért a 3.35 Állításnak megfelelően $\mathcal{T}$ teljes osztályozási fa az $\text{Ext}(G, M, I)$ hálóban. Legyen most $\mathcal{F} \subseteq \text{Ext}(G, M, I)$ egy teljes osztályozási fa ami tartalmazza $\mathcal{T}$ -t. Mivel a 3.35 Állításnak megfelelően $\mathcal{F}$ a $\mathcal{B}(G, M, I)$ hálóban is osztályozási fa és $\mathcal{T}$ feltevésszerint maximális osztályozási fa $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben, ezért $\mathcal{F} = \mathcal{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{T}$ az $\text{Ext}(G, M, I)$ hálóban is maximális teljes osztályozási fa.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{T} \subseteq \text{Ext}(G, M, I)$ egy maximális teljes osztályozási fa. Akkor a 3.35 Állításnak megfelelően $\mathcal{T}$ a $\mathcal{B}(G, M, I)$ dobozhálóban is osztályozási fa, így részhalmaza $\mathcal{B}(G, M, I)$ valamely $\mathcal{M}$ maximális osztályozási fájának. Mivel az előbbiek szerint $\mathcal{M}$ az $\text{Ext}(G, M, I)$ hálóban teljes fa és $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ maximális voltából $\mathcal{T} = \mathcal{M}$ következik. Ez azt jelenti hogy $\mathcal{T}$ maximális osztályozási fa a $\mathcal{B}(G, M, I)$ hálóban. $\square$

A fentiek értelmében a 3.4 fejezetben kapott eredményeket „csoport-technológiai” osztályozási fákra is alkalmazhatjuk. Például a 3.26 Állításból és a 3.33 Tételből adódik az alábbi eredmény:

3.37. Következmény. *Ha $\mathcal{B}(G, M, I)$ egy dp-disztributív fokszámozott véges háló, vagy egy olyan véges, gyengén moduláris háló, amely teljesíti a (*) feltételt, akkor $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben a maximális osztályozási fák egyenlő elemszámúak.*

A továbbiakban megmutatjuk, hogy egy elemi kontextusbővítés során a keletkező új doboz-extenzió háló valamennyi osztályozási fája megkapható az eredeti szűkebb kontextus doboz-extenzió hálójának osztályozási fáinak a módosításával.

3.38. Állítás. *Legyen $K_H = (H, M, I \cap H \times M)$ a $K = (G, M, I)$ egy részkontextusa és $\mathcal{T}$ egy osztályozási fa a $\mathcal{B}(K)$ dobozhálóban. Akkor a*

$$\mathcal{T}_H = \{E \cap H \mid E \in \mathcal{T}\}$$

halmazrendszer is osztályozási fa a $\mathcal{B}(K_H)$ dobozhálóban.

Bizonyítás. A 3.10 Következmény értelmében minden $E \in \mathcal{T}$ -re $E \cap H$ egy doboz-extenziója a K_H kontextusnak, így $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{B}(K_H)$. Mivel $G \in \mathcal{T}$, ezért $H = G \cap H \in \mathcal{T}_H$ és nyilvánvalóan H a $\mathcal{B}(K_H)$ doboz-extenzió háló legnagyobb, vagyis 1- eleme. Így a 3.22 Tétel értelmében, ahhoz, hogy igazoljuk hogy $\mathcal{T}_H$ egy osztályozási fa, elég megmutatni hogy $\mathcal{T}_H$ a $\mathcal{B}(K_H)$ háló egy ρ előosztálya. Legyen most $E_1 \cap H$ és $E_2 \cap H$ a $\mathcal{T}_H$ halmaz két nem összehasonlítható eleme. Akkor nyilván egyik sem

egyenlő $\emptyset$ -al és $E_1, E_2 \in \mathcal{T}$ szintén nem összehasonlítható. Mivel $\mathcal{T}$ egy ρ előosztály, ezért innen $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ adódik és így $(E_1 \cap H) \cap (E_2 \cap H) = E_1 \cap E_2 \cap H = \emptyset$. Ez azt jelenti hogy $\mathcal{T}_H$ szintén egy ρ előosztály a $\mathcal{B}(K_H)$ hálóban. Tehát $\mathcal{T}_H$ egy osztályozási fa $\mathcal{B}(K_H)$ -ban. $\square$

3.39. Tétel. Legyen $K_H = (H, M, I \cap H \times M)$ a (G, M, I) véges kontextus egy részkontextusa úgy, hogy $H = G \setminus \{z\}$, $z^{\square\square} \neq \{z\}$ és legyen $\mathcal{T}$ egy osztályozási fa $\mathcal{B}(K_H)$ hálóban. Akkor igazak az alábbi állítások:

- (i) $\mathcal{T}^{(1)} = \{E \in \mathcal{T} \mid E \in \mathcal{B}(G, M, I)\}$ egy rendezésideal $\mathcal{T}$ -ben és $\mathcal{T}^{(2)} = \{E \in \mathcal{T} \mid E \cup \{z\} \in \mathcal{B}(G, M, I)\}$ egy véges lánc $\mathcal{T}$ -ben és $\mathcal{T}^{(1)} \cap \mathcal{T}^{(2)} = \emptyset$;
- (ii) $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^{(1)} \cup \{E \cup \{z\} \mid E \in \mathcal{T}^{(2)}\}$ osztályozási fa a $\mathcal{B}(G, M, I)$ -hálóban.
- (iii) Ha $\mathcal{T}$ a $\mathcal{B}(K_H)$ háló minden atomját tartalmazza, akkor $\mathcal{T}^* \cup \{z^{\square\square}\}$ egy olyan osztályozási fa $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben, ami annak ugyancsak minden atomját tartalmazza.

Bizonyítás. (i) Legyen $E \in \mathcal{T}^{(1)}$ és $F \subseteq E$, $F \in \mathcal{T}$. Mivel E a (G, M, I) egy doboz-extenziója, a 3.18 Tétel alapján $z^{\square\square} \cap E'' = \emptyset$. Így $F'' \subseteq E''$ -ből következik, hogy $z^{\square\square} \cap F'' = \emptyset$, ez pedig a 3.18 Tétel szerint azt jelenti, hogy $F \in \mathcal{T}^{(1)}$. Tehát $\mathcal{T}^{(1)}$ egy rendezésideal $\mathcal{T}$ -ben. Ahhoz, hogy a $\mathcal{T}^{(2)}$ -re vonatkozó állítást igazoljuk, tekintsük először a $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{T} \mid z^{\square\square} \setminus \{z\} \subseteq E\}$ halmazt. Nyilvánvaló, hogy $H \in \mathcal{C}$, ezért $\mathcal{C} \neq \emptyset$ továbbá $z^{\square\square} \setminus \{z\} \neq \emptyset$ miatt $E \cap z^{\square\square} \neq \emptyset$, így $\mathcal{T}^{(1)}$ -nek és $\mathcal{C}$ -nek nem lehet közös eleme. Legyen $E \in \mathcal{C}$ és $F \in \mathcal{T}$. Nyilvánvalóan ha $E \subseteq F$, akkor $z^{\square\square} \setminus \{z\} \subseteq F$ is teljesül, így $F \in \mathcal{C}$. Ezért $\mathcal{C}$ egy rendezésfiltere $\mathcal{H}$ -nak és mivel H véges, $\mathcal{C}$ is véges nemüres halmaz, így nyilván rendelkezik minimális elemekkel (a tartalmazásra nézve). Megmutatjuk, hogy $\mathcal{C}$ -nek csak egy $E_1 \in \mathcal{C}$ minimális eleme lehet. Tegyük fel, hogy $E_2 \in \mathcal{C}$ is minimális elem $\mathcal{C}$ -ben és $E_1 \neq E_2$. Mivel $E_1, E_2 \in \mathcal{T}$ és E_1, E_2 nem összehasonlíthatóak, ezért $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, ami ellentmondás, mivel $z^{\square\square} \setminus \{z\} \subseteq E_1 \cap E_2$ és $z^{\square\square} \setminus \{z\}$ nem üres feltevés szerint. Így tehát E_1 $\mathcal{C}$ -nek a legkisebb eleme is, ezért $\mathcal{C}$ megegyezik az $[E_1] \cap \mathcal{T}$ -vel. Mivel $\mathcal{T}$ egy osztályozási fa, ezért $\mathcal{C}$ egy lánc. Tekintsük most a $\mathcal{T}^{(2)}$ halmazt. Mivel a 3.13 Tétel alapján $\mathcal{T}^{(2)}$ részhalmaza $\mathcal{C}$ -nek, ezért $\mathcal{T}^{(2)}$ maga is egy véges lánc és $\mathcal{T}^{(1)} \cap \mathcal{T}^{(2)} = \emptyset$.

(ii) Mivel $\mathcal{T}^{(1)} \subseteq \mathcal{T}$ ezért $\mathcal{T}^{(1)}$ egy CD-independens halmaz. Azonnal belátható az is, hogy $\{E \cup \{z\} \mid E \in \mathcal{T}^{(2)}\}$ halmaz egy lánc $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben. Valóban, legyen $E_1 \cup \{z\}$ és $E_2 \cup \{z\}$ ennek a halmaznak két tetszőleges eleme. Mivel $\mathcal{T}^{(2)}$ lánc, ezért vagy $E_1 \subseteq E_2$ vagy $E_2 \subseteq E_1$ teljesül, így vagy $E_1 \cup \{z\} \subseteq E_2 \cup \{z\}$, vagy megfordítva. Lássuk be azt is, hogy a $\mathcal{T}^{(1)} \cup \{E \cup \{z\} \mid E \in \mathcal{T}^{(2)}\}$ halmaz ugyancsak CD-independens.

Legyen $E_1 \in \mathcal{T}^{(1)}$ és $E_2 \in \mathcal{T}^{(2)}$. Mivel $E_1, E_2 \in \mathcal{T}$ ezért csak az $E_1 \subseteq E_2$ vagy $E_2 \subseteq E_1$, vagy $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ esetek lehetségesek. Az első esetben $E_1 \subseteq E_2 \cup \{z\}$. Mivel $\mathcal{T}^{(1)}$ rendezésideál, $E_2 \subseteq E_1$ -ből $E_2 \in \mathcal{T}^{(1)}$ következik, ami nem lehetséges, mert $\mathcal{T}^{(1)} \cap \mathcal{T}^{(2)} = \emptyset$. Tekintsük most az $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ esetet. Mivel $E_1 \in \mathcal{T}^{(1)}$, ezért $E_1'' \cap z^{\square\square} = \emptyset \implies E_1 \cap \{z\} = \emptyset$, így $E_1 \cap (E_2 \cup \{z\}) = \emptyset$. Tehát $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^{(1)} \cup \{E \cup \{z\} \mid E \in \mathcal{T}^{(2)}\}$ CD-independens. Mivel $G = H \cup \{z\}$ és $H \in \mathcal{T}$ (és $G \in \mathcal{B}(G, M, I)$), ezért $G \in \mathcal{T}^*$. Mivel G a $\mathcal{B}(G, M, I)$ háló 1 eleme, ezért a 3.22 Tétel értelmében $\mathcal{T}^*$ egy osztályozási fa a $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben.

(iii) Mivel $z^{\square\square}$ egy atom a $\mathcal{B}(G, M, I)$ hálóban, ha hozzá vesszük a $\mathcal{T}^*$ osztályozási fához, akkor a 3.23 Következménynek megfelelően $\mathcal{T}^* \cup \{z^{\square\square}\}$ továbbra is egy osztályozási fa marad $\mathcal{B}(G, M, I)$ -ben.

Végül tegyük fel, hogy $\mathcal{T}$ a $\mathcal{B}(K_H)$ háló minden atomját tartalmazza és mutassuk meg, hogy akkor $\mathcal{T}^* \cup \{z^{\square\square}\}$ osztályozási fa is a $\mathcal{B}(G, M, I)$ háló minden atomját tartalmazza. Valóban, a $z^{\square\square}$ atomot tartalmazza. Másrészt, mivel $\mathcal{B}(G, M, I)$ atomjai a (G, M, I) kontextus $\pi_{\square}$ legfinomabb extenzió-partíciójának a blokkjai, ezért a 3.13 Állítás alapján $\mathcal{B}(G, M, I)$ minden egyéb $z^{\square\square}$ -tól különböző atomja a $\mathcal{B}(K_H)$ hálónak is atomja, így hozzátartozik $\mathcal{T}$ -hez. Mi több, ezek az atomok $\mathcal{T}^{(1)}$ -hez is hozzá tartoznak $\mathcal{T}^{(1)}$ szerkesztése szerint. Mivel $\mathcal{T}^{(1)} \subseteq \mathcal{T}^* \cup \{z^{\square\square}\}$, ezért $\mathcal{T}^* \cup \{z^{\square\square}\}$ a $\mathcal{B}(G, M, I)$ minden atomját tartalmazza. $\square$

3.40. Tétel. *Legyen $K_H = (H, M, I \cap H \times M)$ a $K_G = (G, M, I)$ véges kontextus egy részkontextusa úgy, hogy $H = G \setminus \{z\}$, $z^{\square\square} \neq \{z\}$. Akkor igazak az alábbi állítások:*

- (i) *Minden $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{B}(K_G)$ osztályozási fához található egy olyan $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{B}(K_H)$ osztályozási fa, amire $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_H^*$ teljesül.*
- (ii) *Ha $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{B}(K_G)$ maximális osztályozási fa, akkor $\mathcal{B}(K_H)$ -ban is létezik egy olyan $\mathcal{M}$ maximális osztályozási fa, hogy $\mathcal{T}_G = \mathcal{M}^*$ teljesül.*

Bizonyítás. (i) A 3.38 Állítás szerint a $\mathcal{T}_H = \{E \cap H \mid E \in \mathcal{T}_G\}$ halmaz osztályozási fa $\mathcal{B}(K_H)$ -ban. Megmutatjuk hogy a 3.39 Tételben a $\mathcal{T}_H$ -hoz rendelt

$$\mathcal{T}_H^* = \mathcal{T}_H^{(1)} \cup \left\{ E \cup \{z\} \mid E \in \mathcal{T}_H^{(2)} \right\} = \{E \in \mathcal{T}_H \mid E \in \mathcal{B}(G, M, I)\} \cup \{E \cup \{z\} \mid E \in \mathcal{T}_H, E \cup \{z\} \in \mathcal{B}(G, M, I)\}$$

osztályozási fa megegyezik $\mathcal{T}_G$ -vel:

Legyen $E \in \mathcal{T}_G$ tetszőleges. Akkor $\mathcal{T}_H$ definíciója szerint $F = E \cap H \in \mathcal{T}_H$. Vegyük észre, hogy csupán a következő két eset lehetséges:

- (1) $E \subseteq H$, akkor $E = F$;
- (2) $E \not\subseteq H$, ekkor $E = F \cup \{z\}$.

Az (1) esetben $F \in \mathcal{T}_H^{(1)}$ és így $E = F \in \mathcal{T}_H^{(1)} \subseteq \mathcal{T}_H^*$.

A (2) esetben $F \cup \{z\} \in \mathcal{B}(G, M, I)$ miatt $E = F \cup \{z\} \in \mathcal{T}_H^*$ ismét.

Mivel mindkét esetben $E \in \mathcal{T}_H^*$ teljesül, ezért a $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{T}_H^*$ eredményt kapjuk.

Fordítva, legyen $E \in \mathcal{T}_H^*$ tetszőleges. $\mathcal{T}_H^*$ szerkesztése miatt akkor

vagy $E \in \mathcal{T}_H^{(1)} \subseteq \mathcal{T}_H$,

vagy $E = F \cup \{z\}$, $F \in \mathcal{T}_H^{(2)} \subseteq \mathcal{T}_H$.

Így $\mathcal{T}_H$ definíciója szerint létezik olyan $A \in \mathcal{T}_G$ amire az első esetben $A \cap H = E$, a második esetben pedig $A \cap H = F$ teljesül.

Megmutatjuk hogy az első esetben $z \in A$ nem lehetséges.

Valóban, a 3.18 Tétel alapján $E \in \mathcal{B}(K_H)$ -ből $E \cap z^{\square\square} = E'' \cap z^{\square\square} = \emptyset$ következik. $z \in A$ -ból viszont $z^{\square\square} \subseteq A$ és így $z^{\square\square} \setminus \{z\} \subseteq A \cap H = E$ adódik. A két eredményt összevetve azt kapjuk, hogy $z^{\square\square} \setminus \{z\} = \emptyset$, azaz $z^{\square\square} = \{z\}$, ami ellentmondás.

Tehát az $A \cap H = E$ esetben $z \notin A$, így $A \subseteq H$ és $E = A \cap H = A \in \mathcal{T}_G$.

Az $A \cap H = F$ esetben, az $A \subseteq H$ lehetőséget kizárhatjuk, hiszen $A \subseteq H$ -ből $F = A \in \mathcal{B}(G, M, I)$ és ezáltal $F \in \mathcal{T}_H^{(1)}$ következne, ami nem lehetséges mert $F \in \mathcal{T}_H^{(2)}$ és $\mathcal{T}_H^{(2)} \cap \mathcal{T}_H^{(1)} = \emptyset$. Ezért ebben az esetben $A \not\subseteq H$, így $z \in A$ és $A = F \cup \{z\} = E$. Tehát $E = A \in \mathcal{T}_G$.

Mivel mindkét esetben az $E \in \mathcal{T}_G$ eredményt kaptuk, ezért $\mathcal{T}_H^* = \mathcal{T}_G$.

(ii) Végül tegyük fel, hogy $\mathcal{T}_G$ maximális osztályozási fa a $\mathcal{B}(K_G)$ hálóban. Mivel $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_H^*$, ezért ha $\mathcal{T}_H$ maximális osztályozási fa $\mathcal{B}(K_H)$ -ban, akkor készen vagyunk. Amennyiben $\mathcal{T}_H$ nem maximális, akkor létezik egy olyan $\mathcal{M}$ maximális osztályozási fa $\mathcal{B}(K_H)$ -ban, amire $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{M}$. Akkor nyilván $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_H^* \subseteq \mathcal{M}^*$. Mivel a 3.39 Tétel értelmében $\mathcal{M}^*$ ugyancsak egy osztályozási fa $\mathcal{B}(K_G)$ -ben, $\mathcal{T}_G$ pedig feltevés szerint maximális osztályozási fa, ezért $\mathcal{T}_G = \mathcal{M}^*$. $\square$

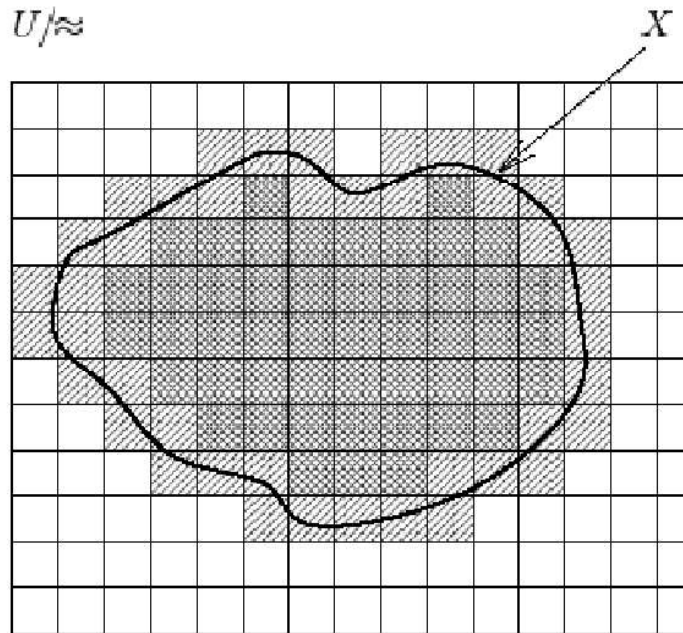
4. Durva halmazok

4.1. Bevezetés

A durva halmazok fogalmát Z. Pawlak vezette be a korai 80-as években. A durva halmazok elmélete azon az észrevételen alapszik, hogy a valóságban a különböző objektumokat a róluk rendelkezésre álló információk alapján nem tudjuk mindig megkülönböztetni. Az objektumok megkülönböztethetlenségét egy bináris relációval, legtöbbször ekvivalencia relációval (reflexív, szimmetrikus, tranzitív) reprezentáljuk, úgy hogy két objektum akkor ekvivalens ha nem áll rendelkezésünkre olyan információ amely alapján meg tudjuk őket különböztetni.

Tekintsük az U univerzumot és ennek egy $X \subseteq U$ (nemüres) részhalmazát és definiáljunk rajta egy megkülönböztethetlenségi relációt. Mivel ez egyben egy ekvivalencia reláció is U -n, ezért az ekvivalencia osztályai segítségével U elemei három osztályba sorolhatók:

- azok az elemek, amelyek biztosan X -ben vannak - ezek azokhoz az ekvivalencia osztályhoz tartoznak, amelyek teljes egészében X -ben vannak, azaz X részhalmazai;
- azok az elemek, amelyek nincsenek X -ben - ezek olyan ekvivalencia osztályoknak az elemei, amelyeknek nincs közös elemük X -el;
- azok az elemek, amelyek tartozhatnak X -hez - ezek olyan osztályoknak az elemei, amelyek tartalmazznak mind X -beli, mind X -en kívüli elemeket.



5. Ábra Durva halmaz approximációk szemléltetése

Ezek után definiáljuk a durva halmazokat egy tetszőleges bináris reláció esetén. Az alábbi definíciókat [33]-ból és [21]-ből vettük át.

Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon és jelölje $R(x)$ azon $y \in U$ elemek halmazát, amelyekkel x relációban áll, azaz legyen $R(x) = \{y \in U \mid x R y\}$. Legyen $X \subseteq U$ egy részhalmaz, akkor X **alsó approximációja** és **felső approximációja** a következőképpen definiálható

$$\begin{aligned} X^\nabla &= \{x \in U \mid R(x) \subseteq X\}, \\ X^\blacktriangle &= \{x \in U \mid R(x) \cap X \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Bevezetjük X **határvonalának** a fogalmát is, amely értelmezés szerint $X^\blacktriangle \setminus X^\nabla$.

A fenti definícióból következik, hogy X felső approximációja azon elemek összessége, amelyek legalább egy $x \in X$ elemmel relációban állnak. X alsó approximációja pedig azokat az elemeket tartalmazza, amelyek olyan tulajdonságúak, hogy csak X -beli elemekkel állnak relációban.

Jelöljük X^c -vel az X halmaz komplementumát $U \setminus X$ -et, akkor könnyen beláthatók az alábbi egyenlőségek:

$$X^{\blacktriangle c} = X^{c\nabla} \text{ és } X^{\nabla c} = X^{c\blacktriangle}. \quad (1)$$

Definiálhatunk egy újabb „megkülönböztethetlenségi” relációt is, ezúttal U részhalmazai között: azt mondjuk, hogy az X és Y halmaz akkor **durván ekvivalens**, jelölése $X \equiv Y$, ha az alsó és felső approximációjuk ugyanaz, tehát ha $X^\nabla = Y^\nabla$ és $X^\blacktriangle = Y^\blacktriangle$. A $\equiv$ ekvivalencia reláció, amelynek az ekvivalencia osztályait **durva halmazoknak** nevezzük. Azaz $X \equiv Y$ azt jelenti, hogy (a megkülönböztethetőség alapján) ugyanazok az elemek tartozhatnak X -hez és Y -hoz.

4.1. Példa: Legyen $U = \{a, b, c\}$ egy univerzum és E egy ekvivalencia U -n úgy, hogy $[a]_E = \{a, c\}$, $[b]_E = \{b\}$, $[c]_E = \{a, c\}$.

Az alsó és felső approximációkat az alábbi 3. táblázatban láthatjuk:

X	X^∇	$X^\blacktriangle$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a, c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\{a, c\}$
$\{a, b\}$	$\{b\}$	U
$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$
$\{b, c\}$	$\{b\}$	U
U	U	U

Durva halmazaink a következők: $\{\emptyset\}$, $\{\{a\}, \{c\}\}$, $\{b\}$, $\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$, $\{a, c\}$ és $\{U\}$.

A durva halmazokat a hálóelmélet eszközeivel először Iwiński vizsgálta 1987-es cikkében [17]. Észrevette, hogy a durva halmazok definiálhatók approximációikkal, azaz bármely $X \subseteq U$ esetén egy durva halmaz így reprezentálható:

$$\mathcal{A}(X) = (X^\nabla, X^\blacktriangle).$$

Tehát a durva halmazok összessége a következőképpen írható fel:

$$RS = \{(X^\nabla, X^\blacktriangle) \mid X \subseteq U\}.$$

RS -en bevezethetünk egy részbenrendezést is a következőképpen:

$$(X^\nabla, X^\blacktriangle) \leq (Y^\nabla, Y^\blacktriangle) \iff X^\nabla \subseteq Y^\nabla \text{ és } X^\blacktriangle \subseteq Y^\blacktriangle.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{RS} = (RS, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, ahol a legkisebb elem $\mathcal{A}(\emptyset) = (\emptyset^\nabla, \emptyset)$, a legnagyobb elem pedig $\mathcal{A}(U) = (U, U^\blacktriangle)$. Az $\mathcal{A}(X)$ durva halmazt RS halmaz egy **egzakt elemének** nevezzük, ha $X^\nabla = X = X^\blacktriangle$.

4.2. Példa: Az előző példából a durva halmazapárok a következők: $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \{a, c\})$, $(\{b\}, \{b\})$, $(\emptyset, \{a, c\})$, $(\{b\}, U)$, $(\{a, c\}, \{a, c\})$, $(\{b\}, U)$ és (U, U) , az egzakt elemek pedig $(\emptyset, \emptyset)$, $(\{b\}, \{b\})$, $(\{a, c\}, \{a, c\})$, (U, U) .

Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon és R^{-1} az inverz relációja. Akkor R^{-1} esetén is definiálható $X \subseteq U$ alsó és felső approximációja, amit az X^∇ és X^Δ szimbólumokkal jelölünk. Ezek a következők:

$$\begin{aligned} X^\nabla &= \{x \in U \mid R^{-1}(x) \subseteq X\} \\ X^\Delta &= \{x \in U \mid R^{-1}(x) \cap X \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

4.3. Megjegyzés. (i) Érdekes észrevétel, hogy a $(\blacktriangle, \nabla)$ és (Δ, ∇) párosok rendezésőrző Galois kapcsolatok $\wp(U)$ -n.

(ii) Egy R kvázirendezés esetén (ha R reflexív és tranzitív), minden $X \subseteq U$ -ra igazak az alábbi egyenlőségek:

$$X^{\blacktriangle\nabla} = X^\blacktriangle, \quad X^{\Delta\nabla} = X^\Delta, \quad X^{\nabla\Delta} = X^\nabla, \quad X^{\nabla\blacktriangle} = X^\nabla \quad (2)$$

$$X^{\Delta c} = X^{c\nabla}, \quad X^{\nabla c} = X^{c\Delta}. \quad (3)$$

4.2. Az approximációk érdekes tulajdonságai különböző relációk esetén

A következőkben ismételjük át néhány ismert relációt fogalmát:

Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon, akkor R

- (a) **reflexív**, ha xRx , minden $x \in U$ -ra;
- (b) **szimmetrikus**, ha xRy -ből következik, hogy yRx minden $x, y \in U$ -ra;
- (c) **tranzitív**, ha xRy és yRz -ből következik, hogy xRz minden $x, y, z \in U$ -ra;
- (d) **kvázirendezés**, ha R reflexív és tranzitív;
- (e) **ekvivalencia**, ha R reflexív, szimmetrikus és tranzitív;
- (f) **sor-teljes**, ha minden $x \in U$ -ra létezik $y \in U$, úgy hogy xRy , azaz $R(x) \neq \emptyset$.

Vizsgáljuk most meg, hogy a fenti reláció típusok esetén milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az általunk definiált approximációk. Az alábbi tulajdonságok jól ismertek a szakirodalomban [22], [V1]:

4.4. Állítás. *Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon. Akkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

- a) R reflexív;
- b) $X \subseteq X^\blacktriangle$ minden $X \subseteq U$ -ra;
- c) $X^\blacktriangledown \subseteq X$ minden $X \subseteq U$ -ra.

4.5. Állítás. *Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon. Akkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

- a) R tranzitív;
- b) $X^{\blacktriangle\blacktriangle} \subseteq X^\blacktriangle$ minden $X \subseteq U$ -ra;
- c) $X^\blacktriangledown \subseteq X^{\blacktriangledown\blacktriangledown}$ minden $X \subseteq U$ -ra.

Az előző két állításból következik, hogy

4.6. Következmény. *Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon. Akkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

- a) R kvázirendezés;
- b) az $X \longrightarrow X^\blacktriangle$ leképezés zárási operátor;
- c) az $X \longrightarrow X^\blacktriangledown$ leképezés interior operátor.

4.7. Állítás. *Legyen R egy bináris reláció az U univerzumon. Akkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

- a) R sor-teljes;
- b) $X^\blacktriangledown \subseteq X^\blacktriangle$ minden $X \subseteq U$ -ra.

4.8. Állítás. *Legyen R egy ekvivalencia reláció az U univerzumon. Akkor minden $X \subseteq U$ -ra igazak a következő kijelentések:*

- a) $X^{\blacktriangledown\blacktriangle} = X^\blacktriangledown$;
- c) $X^{\blacktriangle\blacktriangledown} = X^\blacktriangle$.

Legyen R egy bináris reláció U -n, akkor a C halmazt az R egy **összefüggő komponensének** nevezzük, ha C az R -t tartalmazó legkisebb ekvivalencia relációnak egy osztálya. Jelöljük $C \subseteq U$ összefüggő komponenseinek halmazát $\mathfrak{Co}$ -val; könnyen belátható, hogy bármely $C \in \mathfrak{Co}$ és $x \in U$ esetén $R(x) \cap C \neq \emptyset$ -ből következik, hogy $x \in C$, azaz $R(x) \subseteq C$. Vagyis $C^\blacktriangledown \subseteq C \subseteq C^\blacktriangledown$.

Ha R egy sor-teljes reláció, akkor az $X^\blacktriangledown \subseteq X^\blacktriangle$ tartalmazásból $C^\blacktriangle = C = C^\blacktriangledown$ egyenlőség következik, azaz $\mathcal{A}(C) = (C, C)$ az RS egy egzakt eleme. Jelöljük $RS(C)$ -vel az összefüggő komponensekhez tartozó durva halmazok összességét és az ennek megfelelő részbenrendezett halmazt jelöljük $\mathcal{RS}(C)$ -vel.

A következőkben bemutatunk egy olyan struktúra tételt, ami arra az esetre vonatkozik, amikor a durva halmazokat sor-teljes reláció definiálja. Az alábbi eredmények [V1]-ben találhatók.

4.9. Lemma. *Ha R egy sor-teljes reláció U -n, akkor igazak a következő kijelentések:*

(i) *Ha $\{C_i \mid i \in I\} \subseteq \mathfrak{Co}$ az R összefüggő komponenseinek egy részhalmaza, akkor bármely $\{(X_i^\blacktriangledown, X_i^\blacktriangle) \in RS(C_i) \mid i \in I\}$ esetén igaz,*

hogy $\left(\bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangledown, \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle\right)$ egy durva halmaz U -n.

(ii) *Ha $(X^\blacktriangledown, X^\blacktriangle)$ egy durva halmaz U -n, akkor a $(X^\blacktriangledown \cap C, X^\blacktriangle \cap C)$ páros egy durva halmaz C -n, tetszőleges $C \in \mathfrak{Co}$ összefüggő komponens esetén.*

Bizonyítás. (i) Könnyen belátható, hogy $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle = \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle$ és bizonyítjuk, hogy $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangledown = \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangledown$.

Mivel $X_i^\blacktriangledown \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangledown$ minden $i \in I$ -re, ezért $\bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangledown \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangledown$.

Legyen $x \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangledown$. Mivel $R(x) \neq \emptyset$ és $R(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$, létezik egy olyan $k \in I$ és $y \in C_k$ úgy, hogy xRy . Mivel $x \in C_k$ és $R(x) \subseteq C_k$, következik, hogy $R(x) \subseteq C_k \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} (C_k \cap X_i) = X_k$, ugyanis $X_k \subseteq C_k$ és $X_i \cap C_k = \emptyset$ minden $i \in I \setminus \{k\}$ -ra. Tehát $x \in X_k^\blacktriangledown \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangledown$,

amelyből azt kapjuk, hogy $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangledown = \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangledown$. Tehát bebizonyítottuk,

hogy $\mathcal{A}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangledown, \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle\right)$ egy durva halmaz az U -n.

(ii) Legyen $C \in \mathfrak{Co}$. Most bizonyítjuk, hogy $(X \cap C)^\blacktriangledown = X^\blacktriangledown \cap C$ és $(X \cap C)^\blacktriangle = X^\blacktriangle \cap C$. Könnyen belátható, hogy $(X \cap C)^\blacktriangledown = X^\blacktriangledown \cap C^\blacktriangledown =$

$X^\nabla \cap C$. Másrészt, $(X \cap C)^\blacktriangle \subseteq X^\blacktriangle$ és $(X \cap C)^\blacktriangle \subseteq C^\blacktriangle = C$, ahonnan következik, hogy $(X \cap C)^\blacktriangle \subseteq X^\blacktriangle \cap C$.

Fordítva, feltételezzük, hogy $x \in X^\blacktriangle \cap C$. Akkor $R(x) \cap X \neq \emptyset$ és $R(x) \subseteq C$ -ből következik, hogy $R(x) \cap (X \cap C) = (R(x) \cap C) \cap X = R(x) \cap X \neq \emptyset$, azaz $x \in (X \cap C)^\blacktriangle$. Tehát $(X \cap C)^\blacktriangle = X^\blacktriangle \cap C$. $\square$

4.10. Következmény. Ha R egy sor-teljes reláció, akkor R bármely összefüggő komponenseinek a $\{C_k \mid k \in K\}$ részhalmaza esetén

$\mathcal{A}\left(\bigcup_{k \in K} C_k\right)$ egzakt eleme RS -nek.

Bizonyítás. Ha $K = \emptyset$, akkor $\bigcup_{k \in K} C_k = \emptyset$ és $\emptyset^\nabla = \emptyset^\blacktriangle = \emptyset$. Ha $K \neq$

$\emptyset$, akkor az előző lemma alapján $\left(\bigcup_{k \in K} C_k\right)^\nabla = \bigcup_{k \in K} C_k^\nabla = \bigcup_{k \in K} C_k =$

$\bigcup_{k \in K} C_k^\blacktriangle = \left(\bigcup_{k \in K} C_k\right)^\blacktriangle$. $\square$

Tekintsük a $\mathcal{P}_i = (P_i, \leq_i)$, $i \in I$ részbenrendezett halmazokat, és jelölje $P = \prod_{i \in I} P_i$ ezen halmazok Descartes szorzatát, továbbá jelöljük x_i -vel az $x \in P$ elem i -edik koordinátáját. Akkor x az $x = (x_i)_{i \in I}$ alakban írható. P -n egy $\leq$ részbenrendezést definiálhatunk a következőképpen: $x, y \in P$ -re $x \leq y \iff x_i \leq_i y_i$ minden $i \in I$ -re. Az így kapott $(P, \leq)$ részbenrendezett halmazt a $(P, \leq_i)$, $i \in I$ részbenrendezett halmazok Descartes szorzatának nevezzük és a továbbiakban röviden $\prod_{i \in I} \mathcal{P}_i$ -vel jelöljük.

4.11. Tétel. Ha R egy sor-teljes reláció U -n, akkor $\mathcal{RS}$ izomorf $\prod_{C \in Co} \mathcal{RS}(C)$ -vel.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{Co} = \{C_i \mid i \in I\}$ és értelmezzük a következő két leképezést:

$$\Phi: RS \longrightarrow \prod_{i \in I} RS(C_i) \text{ és } \Psi: \prod_{i \in I} RS(C_i) \longrightarrow RS$$

$$\Phi(\mathcal{A}(X)) := ((X^\nabla \cap C_i, X^\blacktriangle \cap C_i))_{i \in I},$$

minden $\mathcal{A}(X) = (X^\nabla, X^\blacktriangle) \in RS$ esetén, és

$$\Psi(((X_i^\nabla, X_i^\blacktriangle))_{i \in I}) := \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle\right),$$

minden $((X_i^\nabla, X_i^\blacktriangle))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} RS(C_i)$ -re.

A 4.9 Lemma alapján Φ és Ψ jól definiáltak és könnyen bizonyítható, hogy rendezésőrzők. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy rendezés-izomorfizmusok, elég megmutatnunk, hogy egymás inverzei.

Tetszőleges $\mathcal{A}(X) = (X^\nabla, X^\blacktriangle) \in RS$ esetén

$$\begin{aligned}\Psi(\Phi(\mathcal{A}(X))) &= \Psi(((X^\nabla \cap C_i, X^\blacktriangle \cap C_i))_{i \in I}) = \\ &= (\bigcup_{i \in I} (X^\nabla \cap C_i), \bigcup_{i \in I} (X^\blacktriangle \cap C_i)) = \\ &= \left(X^\nabla \cap \left(\bigcup_{i \in I} C_i \right), X^\blacktriangle \cap \left(\bigcup_{i \in I} C_i \right) \right) = \\ &= (X^\nabla, X^\blacktriangle) = \mathcal{A}(X).\end{aligned}$$

Továbbá, bármely $((X_i^\nabla, X_i^\blacktriangle))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} RS(C_i)$ esetén

$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(((X_i^\nabla, X_i^\blacktriangle))_{i \in I})) &= \Phi\left(\left(\bigcup_{j \in I} X_j^\nabla, \bigcup_{j \in I} X_j^\blacktriangle\right)\right) \\ &= \left(\left(\left(\bigcup_{j \in I} X_j^\nabla\right) \cap C_i, \left(\bigcup_{j \in I} X_j^\blacktriangle\right) \cap C_i\right)\right)_{i \in I}.\end{aligned}$$

Mivel $(X_j^\nabla, X_j^\blacktriangle) \in RS(C_j)$ minden $j \in I$ -re, így $X_j^\nabla, X_j^\blacktriangle \subseteq C_j$. Minden $i, j \in I$, $i \neq j$ -re igaz, hogy $C_i \cap C_j = \emptyset$. Ezért

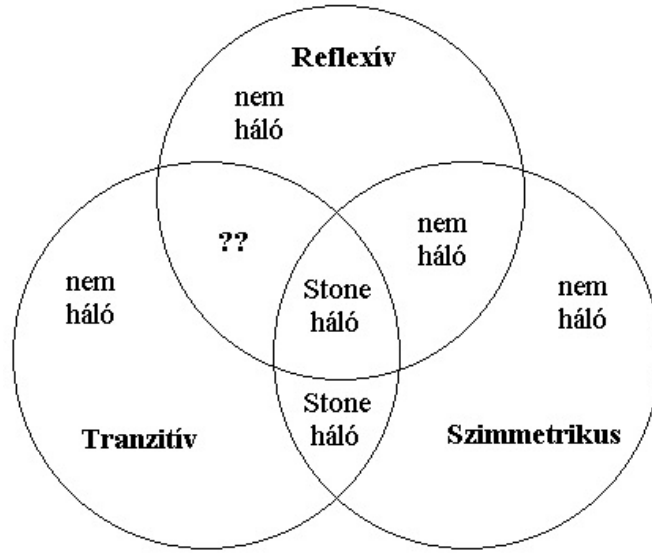
$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{j \in I} X_j^\nabla\right) \cap C_i &= \bigcup_{j \in I} (X_j^\nabla \cap C_i) = X_i^\nabla \text{ és} \\ \left(\bigcup_{j \in I} X_j^\blacktriangle\right) \cap C_i &= \bigcup_{j \in I} (X_j^\blacktriangle \cap C_i) = X_i^\blacktriangle\end{aligned}$$

minden $i \in I$ -re. Innen kapjuk, hogy

$\Phi(\Psi(((X_i^\nabla, X_i^\blacktriangle))_{i \in I})) = ((X_i^\nabla, X_i^\blacktriangle))_{i \in I}$. Az előző egyenlőségekből következik, hogy Φ és Ψ rendezésőrzők és egymás inverzei ezért rendezés-izomorfizmusok. Így $\mathcal{RS} \cong \prod_{C \in Co} \mathcal{RS}(C)$. $\square$

4.3. Kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálójá

Régóta megválaszolatlan kérdés a durva halmazok elméletében, hogy milyen R bináris reláció esetén alkotnak a vele definiált durva halmazok hálót. A szakirodalomban több cikket találunk, amely a különböző eseteket vizsgálja. Ismert, hogy ha R ekvivalencia reláció, vagy R szimmetrikus és tranzitív, akkor $\mathcal{RS} = (RS, \leq)$ egy teljes Stone háló; ha R reflexív és szimmetrikus, vagy ha R csak tranzitív, akkor $\mathcal{RS}$ még csak egy félháló sem lesz. Hasonlóan, a '90-es évek óta nyitott kérdés az is, hogy ha R egy kvázirendezés, akkor az R -el definiált durva halmazok hálót alkotnak-e. Az alábbi ábrán szemléletesebben is bemutatom a szakirodalomban tárgyalt eseteket:



6. Ábra

Sikerült bizonyítanom, hogy ha R egy kvázirendezés, akkor $\mathcal{RS}$ egy teljes részhálójá $\wp(U) \times \wp(U)$ -nak, és így teljesen disztributív. Ez az alfejezet tartalmazza ennek a bizonyítását és bemutatja az így kapott háló néhány érdekes tulajdonságát. A fejezet eredményei a szerző [V1] cikkében publikált saját eredményein alapul.

Először ismételjünk át egy ismert halmazelméleti fogalmat. Legyen R egy nemüres U halmazon definiált tranzitív reláció. Az $x \in U$ elem **utódjának** nevezzük az $y \in U$ elemet, ha xRy . Legyen $X \subseteq Y \subseteq U$. Az X halmaz **kofinális** Y -ban, ha minden $y \in Y$ elemnek van utódja X -ben. Használva az eddigi jelöléseket y utódjait $R(y)$ -al jelöljük. Más szóval X akkor és csakis akkor kofinális Y -ban, ha $R(y) \cap X \neq \emptyset$ minden $y \in Y$ -ra, azaz $Y \subseteq X^\blacktriangle$. Mivel $X \subseteq Y$ ezért X kofinális Y -ban akkor és csakis akkor, ha $X^\blacktriangle = Y^\blacktriangle$.

A fő tételünk bizonyításában felhasználjuk A. H. Stone egyik nevezetes tételét [42]:

4.12. Tétel. *Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az U halmaz k kofinális részhalmazra legyen particionálható, az, hogy U minden elemének legalább k utódja legyen.*

Legyen R egy kvázirendezés U -n. Akkor minden $a, b \in U$ -ra igaz, hogy

$$aRb \Leftrightarrow b \in R(a) \Leftrightarrow R(b) \subseteq R(a),$$

és $|R(a)| \geq 1$. Ha R egy kvázirendezés, akkor $^\blacktriangle$ egy zárási operátor és $^\blacktriangledown$ egy interior operátor, ahogy azt már láthattuk a 4.6 Következményben. Ezért minden $X \subseteq U$ -ra igaz, hogy

$$X^\blacktriangledown \subseteq X \subseteq X^\blacktriangle, X^{\blacktriangledown\blacktriangledown} = X^\blacktriangledown \text{ és } X^{\blacktriangle\blacktriangle} = X^\blacktriangle.$$

A következő tétel bizonyításánál egy másik jól ismert tulajdonságot is használunk majd

$$X \subseteq Y \implies X^\nabla \subseteq Y^\nabla \text{ és } X^\blacktriangle \subseteq Y^\blacktriangle.$$

4.13. Tétel. ([V1]) *Ha R egy kvázirendezés a nemüres U halmazon, akkor $\mathcal{RS}$ egy teljes részhálóját a $\wp(U) \times \wp(U)$ hálónak.*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy $\mathcal{RS}$ egy teljes részhálóját $\wp(U) \times \wp(U)$ -nak, elég megmutatnunk, hogy bármely $\{\mathcal{A}(X_i) | i \in I\} = \{(X_i^\nabla, X_i^\blacktriangle), i \in I\}$ durva halmaz család esetén a $\left(\bigcap_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcap_{i \in I} X_i^\blacktriangle\right)$ és $\left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle\right)$ párosok szintén durva halmazok.

(1) Először megkonstruálunk egy olyan $W \subseteq U$ halmazt, amelyre $W^\nabla = \bigcap_{i \in I} X_i^\nabla$ és $W^\blacktriangle = \bigcap_{i \in I} X_i^\blacktriangle$ teljesül. Először tekintsük a

$$Z = \bigcap_{i \in I} X_i^\blacktriangle \setminus \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle$$

halmazt. Könnyen észrevehető, hogy bármely $a \in Z$ esetén $|R(a)| \geq 2$. Valóban, Z definíciójából következik, hogy tetszőleges $a \in Z$ esetén $R(a) \cap X_i \neq \emptyset$, minden $i \in I$ -re és hogy $R(a) \cap \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \emptyset$. Ha $R(a)$ csak egy elemű lenne, vagyis $R(a) = \{a\}$, akkor $R(a) \cap X_i \neq \emptyset$ -ből következik, hogy $a \in X_i$ minden $i \in I$ -re, tehát $a \in \bigcap_{i \in I} X_i$ ellentmondáshoz jutunk.

Először tekintsük a $Z^\nabla \neq \emptyset$ esetet. Vegyük észre, hogy minden $a \in Z^\nabla$ utódja szintén Z^∇ -ben van, ugyanis ha b az a utódja, akkor aRb -ből következik, hogy $R(b) \subseteq R(a) \subseteq Z$, azaz $b \in Z$. Tehát $a \in Z^\nabla$ -nek legalább két utódja van Z^∇ -ben. Alkalmazzuk most Stone tételét a Z^∇ halmazra és a rajta definiált $R' = R \cap (Z^\nabla \times Z^\nabla)$ relációra (ami nem más, mint az R leszűkítése). Akkor azt kapjuk, hogy létezik két diszjunkt $A, B \subseteq Z^\nabla$ halmaz amelyek kofinálisak a (Z^∇, R') kvázirendezett halmazban. Mivel $R' \subseteq R$, ezért A, B kofinálisak Z^∇ -ben R -re nézve is. Ezért $Z^\nabla \subseteq A^\blacktriangle$ és $Z^\nabla \subseteq B^\blacktriangle$. Hátra van még a $Z^\nabla = \emptyset$ eset. Ekkor tekintsük úgy, hogy $A = B = \emptyset$.

Ezek után definiáljuk a W halmazt a következőképpen:

$$W = \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup (Z \setminus A).$$

Megmutatjuk, hogy $W^\nabla = \bigcap_{i \in I} X_i^\nabla$ és $W^\blacktriangle = \bigcap_{i \in I} X_i^\blacktriangle$.

Mivel $\bigcap_{i \in I} X_i \subseteq W$, ezért $\bigcap_{i \in I} X_i^\nabla = \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)^\nabla \subseteq W^\nabla$. A fordított tartalmazás igazolásához tekintsünk egy $a \in W^\nabla$ elemet, akkor $R(a) \subseteq W = \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \cup (Z \setminus A)$, és igazolható, hogy $R(a) \cap (Z \setminus A) = \emptyset$.

Valóban, ha $R(a) \cap (Z \setminus A) \neq \emptyset$, akkor létezik $b \in R(a) \cap (Z \setminus A)$. Azaz $R(b) \subseteq R(a) \subseteq W$ és $b \in Z$ -ből következik, hogy $R(b) \cap \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) = \emptyset$.

Ezáltal $R(b) \subseteq Z \setminus A$. Így $Z^\nabla = \emptyset$ esetben ellentmondáshoz jutunk. Ha $Z^\nabla \neq \emptyset$, akkor mivel A kofinális Z^∇ -ben azt kapjuk, hogy $b \in Z^\nabla \subseteq A^\Delta$. Másrészt $R(b) \subseteq Z \setminus A$ -ból következik, hogy $R(b) \cap A = \emptyset$, ami ellentmondás, hiszen $b \in A^\Delta$. Tehát $R(a) \cap (Z \setminus A) = \emptyset$.

Vegyük észre, hogy $R(a) \cap (Z \setminus A) = \emptyset$ és $R(a) \subseteq W$ relációkból következik, hogy $R(a) \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$, vagyis $a \in \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)^\nabla = \bigcap_{i \in I} X_i^\nabla$. Tehát $W^\nabla = \bigcap_{i \in I} X_i^\nabla$.

Ezek után bebizonyítjuk, hogy $W^\Delta = \bigcap_{i \in I} X_i^\Delta$. Azonnal belátható, hogy $\bigcap_{i \in I} X_i \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i^\Delta$ és $Z \setminus A \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i^\Delta$, így $W \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i^\Delta$. Mivel $\bigcap_{i \in I} X_i^\Delta$ zárási operátor, ezért $W^\Delta \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)^\Delta \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i^\Delta$.

Most ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy $\bigcap_{i \in I} X_i^\Delta \subseteq W^\Delta$, előbb megmutatjuk, hogy $Z \subseteq (Z \setminus A)^\Delta$. Legyen $z \in Z$ tetszőleges. Ha $z \in Z \setminus A$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy $z \in A$. Mivel A kofinális Z^∇ -ben, ezért $A \subseteq Z^\nabla \subseteq B^\Delta$, de szerkesztés szerint $B \subseteq Z \setminus A$, így $B^\Delta \subseteq (Z \setminus A)^\Delta$. Tehát $z \in A \subseteq (Z \setminus A)^\Delta$, vagyis $Z \subseteq (Z \setminus A)^\Delta$.

Mindezeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\bigcap_{i \in I} X_i^\Delta = \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)^\Delta \cup \left(\bigcap_{i \in I} X_i^\Delta \setminus \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)^\Delta \right) = \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)^\Delta \cup Z \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)^\Delta \cup (Z \setminus A)^\Delta \subseteq W^\Delta.$$

Így igazoltuk, hogy $W^\Delta = \bigcap_{i \in I} X_i^\Delta$. Tehát $(W^\nabla, W^\Delta) = \left(\bigcap_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcap_{i \in I} X_i^\Delta \right)$ durva halmaz.

(2) Azt, hogy $\left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcup_{i \in I} X_i^\Delta \right)$ egy durva halmaz úgy igazoljuk, hogy megkonstruálunk egy $V \subseteq U$ halmazt, amire $V^\nabla = \bigcup_{i \in I} X_i^\nabla$ és $V^\Delta = \bigcup_{i \in I} X_i^\Delta$.

Tekintsük az

$$S = \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right)^\Delta \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla \right)$$

halmazt. Vegyük észre itt is, hogy minden $b \in S$ -re, $|R(b)| \geq 2$. Valóban, ha feltételeznénk, hogy $R(b)$ -nek csak egy eleme van, vagyis $R(b) = \{b\}$, akkor $b \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\Delta = \bigcup_{i \in I} X_i^\Delta$ -ből $R(b) \cap X_m \neq \emptyset$ következne tetszőleges $m \in I$ -re, ami azt jelentené, hogy $b \in X_m$. Ekkor ebben az esetben $\{b\} = R(b) \subseteq X_m$ -ből $b \in X_m^\nabla$ következne, vagyis azt kapnánk, hogy $b \in \bigcup_{i \in I} X_i^\nabla$ ami ellentmondás.

Először tekintsük az $S^\nabla \neq \emptyset$ esetet. Hasonlóan az (1)-es esethez ekkor minden $s \in S^\nabla$ elemnek legalább két utódja van S^∇ -ben, azaz 4.12 Tétel alapján S^∇ -nek létezik két diszjunkt A, B kofinális részhalmaza. Így $S^\nabla \subseteq A^\Delta$ és $S^\nabla \subseteq B^\Delta$. Az $S^\nabla = \emptyset$ esetben tekintsük úgy, hogy $A = B = \emptyset$. Most megkonstruálunk egy H és V halmazt a következőképpen

$$\begin{aligned} H &= \left\{ a \in S \mid R(a) \not\subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\Delta \right\}, \\ V &= \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right) \cup H \cup A. \end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy $V \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\Delta$, mivel $\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\Delta$, és $H, A \subseteq S \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\Delta$ szerkesztés szerint.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy

$$V^\nabla = \bigcup_{i \in I} X_i^\nabla \text{ és } V^\Delta = \bigcup_{i \in I} X_i^\Delta.$$

Valóban $X_i^\nabla \subseteq V$, minden $i \in I$ -re a V értelmezése alapján. Következésképpen, minden $i \in I$ -re $X_i^\nabla = X_i^{\nabla \nabla} \subseteq V^\nabla$, ezért

$$\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla \subseteq V^\nabla.$$

A fordított tartalmazás bizonyításához tekintsünk egy $a \in V^\nabla$ elemet. Akkor

$$a \in R(a) \subseteq V = \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right) \cup H \cup A.$$

Könnyen belátható, hogy az $a \in H$ eset nem lehetséges, mivel $R(a) \subseteq V \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\Delta$. Most lássuk be, hogy az $a \in A$ eset sem lehetséges.

Valóban, ha $a \in A$ teljesül, akkor $S^\nabla \neq \emptyset$ és $A \subseteq S^\nabla \subseteq B^\Delta$ alapján $a \in B^\Delta$. Tehát létezik egy olyan $b \in B$ elem, melyre aRb és $b \in R(a) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right) \cup H \cup A$. Azonban a $b \in A$ eset nem lehetséges, mert $A \cap B =$

$\emptyset$. A $b \in H$ eset sem lehetséges, mert $R(b) \subseteq R(a) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\Delta$.

Így csak a $b \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right)$ eset maradt, ami szintén ellentmondás, mert
 $b \in B \subseteq S = \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right)$.
Mivel megmutattuk, hogy az $a \in A$ és $a \in H$ esetek nem lehetségesek,
ezért $a \in \bigcup_{i \in I} X_i^\nabla$. Tehát $V^\nabla = \bigcup_{i \in I} X_i^\nabla$.

Igazoljuk most, hogy $V^\blacktriangle = \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle$. Mivel $V \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle$, ezért

$$V^\blacktriangle \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^{\blacktriangle\blacktriangle} = \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle = \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle.$$

A fordított tartalmazás bizonyítása céljából legyen $a \in \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle$. Akkor
létezik olyan $k \in I$, hogy $a \in X_k^\blacktriangle$, amiből $R(a) \cap X_k \neq \emptyset$ következik.
Ha $R(a) \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right) \neq \emptyset$, akkor $a \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right)^\blacktriangle \subseteq V$ és bizonyításunk
véget ért. Tegyük fel tehát, hogy $R(a) \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right) = \emptyset$. Akkor

$$a \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle \setminus \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right) = S.$$

Ha $R(a) \not\subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle$, akkor $a \in H \subseteq V \subseteq V^\blacktriangle$ és szintén kész vagyunk.

Tekintsük akkor az $R(a) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^\blacktriangle$ esetet. Ekkor szükségszerűen

$R(a) \subseteq S$, mivel feltételeztük, hogy $R(a) \cap \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla\right) = \emptyset$. Így $a \in S^\nabla$
és $S^\nabla \neq \emptyset$. Akkor $S^\nabla \subseteq A^\blacktriangle$, hiszen A kofinális S^∇ -ben. Mivel $A \subseteq V$,
ezért az $a \in A^\blacktriangle \subseteq V^\blacktriangle$ eredményhez jutunk. Így sikerült igazolnunk,
hogy

$$\bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle = V^\blacktriangle.$$

Tehát $\left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle\right)$ egy durva halmaz. □

Ismert tény, hogy egy U halmaz részhalmazainak az összessége $(\wp(U), \subseteq)$, teljesen disztributív (Boole) hálót alkot, valamint hogy $(\wp(U) \times \wp(U), \subseteq)$ is teljesen disztributív háló. Mivel minden teljes disztributív háló minden teljes részhálójára is teljesen disztributív a 4.13 Tételből az alábbi eredményt kaptam:

4.14. Következmény. Ha R egy kvázirendezés a nemüres U halmazon, akkor $\mathcal{RS}$ egy teljesen disztributív teljes háló, melyben

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{A}(X_i) = \left(\bigcap_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcap_{i \in I} X_i^\blacktriangle \right), \text{ és } \bigvee_{i \in I} \mathcal{A}(X_i) = \left(\bigcup_{i \in I} X_i^\nabla, \bigcup_{i \in I} X_i^\blacktriangle \right)$$

minden $\{A(X_i) | i \in I\} \subseteq RS$ esetén.

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{RS}$ egy teljes részhálóját a teljesen disztributív $\wp(U) \times \wp(U)$ hálónak, ezért $\mathcal{RS}$ is teljesen disztributív. Mivel az $\{A(X_i) | i \in I\} \subseteq RS$ halmazok szuprémuma és infimuma megegyezik a $\wp(U) \times \wp(U)$ hálóbeli infimummal és szuprémummal, ezért a fenti egyenlőségek is azonnal következnek. $\square$

4.4. A durva halmazok hálójának egyéb tulajdonságai

Ebben az alfejezetben megmutatom hogy bár $\mathcal{RS}$ általában nem egy komplementumos háló, három a komplementumképzés műveletéhez hasonló unáris művelet is definiálható rajta. Az irodalomban jól ismert, hogy ekvivalencia reláció esetén a durva halmazok egy Stone hálót alkotnak. Szükséges és elégséges feltételt bizonyítok arra nézve, hogy egy R kvázirendezés esetén $\mathcal{RS}$ mikor lesz Stone háló. A fejezet eredményei a szerző [V1] cikkében találhatók.

Értelmezzük a következő leképezést a durva halmazok hálóján:

$$c : RS \longrightarrow RS, \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X^c).$$

Mivel $c((X^\nabla, X^\blacktriangle)) = (X^{c\nabla}, X^{c\blacktriangle}) = (X^{\blacktriangle^c}, X^{\nabla^c})$ minden $X \subseteq U$ esetén, ezért a c leképzés jól definiált. Könnyen belátható az is, hogy $\mathcal{A}(X) \leq \mathcal{A}(Y) \implies \mathcal{A}(Y^c) \leq \mathcal{A}(X^c)$ ami azt jelenti, hogy c egy rendezésfordító leképzés $\mathcal{RS}$ -en.

Minden $\alpha, \beta \in RS$ esetén

$$\begin{aligned} c(\alpha \vee \beta) &= c(\alpha) \wedge c(\beta) \\ c(\alpha \wedge \beta) &= c(\alpha) \vee c(\beta) \\ c(c(\alpha)) &= \alpha \end{aligned}$$

Másszóval, c egy **de Morgan** művelet az $\mathcal{RS}$ teljes hálón.

4.15. Megjegyzés. Az $\alpha \vee c(\alpha) = (U, U)$ és $\alpha \wedge c(\alpha) = (\emptyset, \emptyset)$ egyenlőségek nem minden esetben igazak. Azonban $X^\nabla \cap X^{c\nabla} = (X \cap X^c)^\nabla = \emptyset^\nabla = \emptyset$ és $X^\blacktriangle \cup X^{c\blacktriangle} = (X \cup X^c)^\blacktriangle = U^\blacktriangle = U$ minden $X \subseteq U$ -ra.

4.16. Állítás. $\mathcal{RS}$ egy önduális részbenrendezett halmaz, azaz $\mathcal{RS}$ izomorf a duálisával, $\mathcal{RS}^d$ -vel.

Legyen L egy disztributív háló amin értelmezett egy c de Morgan művelet. Amennyiben minden $x, y \in L$ -re teljesül az

$$x \wedge c(x) \leq y \vee c(y) \quad (4)$$

egyenlőtlenség, akkor a $\mathbb{K} = (L, \wedge, \vee, c)$ algebrát **Kleene algebrának** nevezzük.

4.17. Állítás. *Ha R egy kvázirendezés a nemüres U halmazon, akkor $(\mathcal{RS}, \cap, \cup, c)$ egy Kleene algebra.*

Bizonyítás. Már bebizonyítottuk, hogy $(\mathcal{RS}, \cap, \cup, c)$ egy disztributív háló és hogy $c : RS \rightarrow RS$ de Morgan művelet ezen a hálón. Igazoljuk, hogy teljesül a (4)-es egyenlőtlenség. Legyen $x = (X^\nabla, X^\blacktriangle)$ és $y = (Y^\nabla, Y^\blacktriangle)$ két teszőleges durva halmaz, akkor $x \wedge c(x) = (X^\nabla, X^\blacktriangle) \cap (X^{\blacktriangle c}, X^{\nabla c}) = (\emptyset, X^\blacktriangle \cap X^{\nabla c})$, (mivel $X^\nabla \subseteq X^\blacktriangle$). Hasonlóan igazolható, hogy $y \vee c(y) = (Y^\nabla, Y^\blacktriangle) \cup (Y^{\blacktriangle c}, Y^{\nabla c}) = (Y^\nabla \cup Y^{\blacktriangle c}, U)$. Nyilvánvaló, hogy $(\emptyset, X^\blacktriangle \cap X^{\nabla c}) \subseteq (Y^\nabla \cup Y^{\blacktriangle c}, U)$, azaz teljesül a (4)-es egyenlőtlenség. $\square$

Legyen L egy háló amelynek a legkisebb eleme a 0. Egy x^* elemet az $x \in L$ **pszeudokomplementumának** nevezzük, ha $x \wedge x^* = 0$ és minden $a \in L$ -re, $x \wedge a = 0$ -ból következik, hogy $a \leq x^*$. Minden elemnek csak egy pszeudokomplementuma lehet. Egy hálót **pszeudokomplementumosnak** nevezzük, ha minden elemének van pszeudokomplementuma. Legyen L egy háló amelynek a legnagyobb eleme az 1. Az x^+ elemet az $x \in L$ elem **duális pszeudokomplementumának** nevezzük, ha $x \vee x^+ = 1$ és $x \vee y = 1$ -ből következik, hogy $x^+ \leq y^+$.

Mivel minden teljesen disztributív teljes háló pszeudokomplementumos és duálisan pszeudokomplementumos is, ezért azonnal kijelenthetjük az alábbi állítást:

4.18. Állítás. *Ha R egy kvázirendezés a nemüres U halmazon, akkor $\mathcal{RS}$ és a duálisa $\mathcal{RS}^d$ is pszeudokomplementumos háló.*

4.19. Állítás. *Az $\mathcal{RS}$ hálóban minden $X \subseteq U$ esetén a pszeudokomplementum a következő*

$$\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\blacktriangle \Delta c}).$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy $\mathcal{A}(X) \wedge \mathcal{A}(X^{\blacktriangle \Delta c}) = (\emptyset, \emptyset)$, mert az (1), (2) összefüggések alapján $X^{\blacktriangle \Delta c \blacktriangle} = X^{\blacktriangle \Delta \nabla c} = X^{\blacktriangle \Delta c}$, továbbá a $X^\nabla \subseteq X^\blacktriangle \subseteq X^{\blacktriangle \Delta}$. Másrészt $X^\nabla \cap X^{\blacktriangle \Delta c \nabla} \subseteq X^\blacktriangle \cap X^{\blacktriangle \Delta c} = \emptyset$. Ha $\mathcal{A}(X) \wedge \mathcal{A}(Y) = (\emptyset, \emptyset)$, akkor $X^\blacktriangle \cap Y^\blacktriangle = \emptyset$ és $Y^\blacktriangle \subseteq X^{\blacktriangle c}$. Következik, hogy $Y \subseteq Y^{\blacktriangle \nabla} \subseteq X^{\blacktriangle c \nabla}$ és a (3) összefüggésből $X^{\blacktriangle c \nabla} = X^{\blacktriangle \Delta c}$, ahonnan $\mathcal{A}(Y) \subseteq \mathcal{A}(X^{\blacktriangle \Delta c})$. Tehát $\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\blacktriangle \Delta c})$. $\square$

4.20. Állítás. *Az $\mathcal{RS}$ hálóban minden $X \subseteq U$ esetén a duális pszeudokomplementum a következőképpen adható meg*

$$\mathcal{A}(X)^+ = \mathcal{A}(X^{\nabla \nabla c}).$$

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy $\mathcal{A}(X) \vee \mathcal{A}(X^{\nabla \nabla c}) = (U, U)$, azaz hogy $(X^\nabla, X^\blacktriangle) \vee (X^{\nabla \nabla c \nabla}, X^{\nabla \nabla c \blacktriangle}) = (U, U)$. Mivel az (1), (2) összefüggések alapján $X^{\nabla \nabla c \nabla} = X^{\nabla \nabla \blacktriangle c} = X^{\nabla \nabla c}$, továbbá $X^{\nabla \nabla} \subseteq X^\nabla$, ezért $X^\nabla \cup X^{\nabla \nabla c \nabla} \supseteq X^\nabla \cup X^{\nabla \nabla c} \supseteq X^\nabla \cup X^{\nabla c} = U$.

Ugyanígy $X^{\nabla\nabla} \subseteq X^{\nabla}$ -ból $X^{\nabla\nabla^c} \supseteq X^{\nabla^c}$ következik, és így, $X^{\Delta} \cup X^{\nabla\nabla^c\Delta} \supseteq X^{\Delta} \cup X^{\nabla\nabla^c} \supseteq X^{\Delta} \cup X^{\nabla^c} \supseteq X^{\nabla} \cup X^{\nabla^c} = U$. Tehát $X^{\nabla} \cup X^{\nabla^c\Delta} = U$ és $X^{\Delta} \cup X^{\nabla\nabla^c\Delta} = U$.

Ha $\mathcal{A}(X) \vee \mathcal{A}(Y) = (U, U)$, akkor $X^{\nabla} \cup Y^{\nabla} = U$ és $X^{\Delta} \cup Y^{\Delta} = U$. Így $X^{\nabla^c} \subseteq Y^{\nabla}$, ahonnan az (1) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy $X^{\nabla^c} = X^{\nabla^c\Delta} \subseteq Y^{\nabla\Delta} = Y^{\nabla} \subseteq Y$. Tehát $\mathcal{A}(X^{\nabla^c}) \leq \mathcal{A}(Y)$. $\square$

J.S. Pomykala és J.A. Pomykala bebizonyította, hogy $\mathcal{RS} = (RS, \leq)$ egy ekvivalencia reláció esetén egy Stone háló. Egy disztributív pseudokomplementumos hálót **Stone hálónak** nevezünk, ha teljesül a Stone egyenlőség, azaz $x^* \vee x^{**} = 1$, ahol az 1 a háló legnagyobb eleme.

Később azt is igazolták, hogy ekvivalencia esetén $\mathcal{RS} = (RS, \leq)$ egy reguláris kétszeres Stone háló.

4.21. Megjegyzés: Legyen L egy olyan disztributív háló, hogy mind L , mind duálisa L^d pseudokomplementumos háló is egyben. L -t **reguláris kétszeres Stone hálónak** nevezzük, ha mind L , mind duálisa L^d Stone háló és tetszőleges $x, y \in L$ esetén teljesül az $(x^* = y^*$ és $x^+ = y^+) \implies x = y$ implikáció, ahol x^* az x elem pseudokomplementumát és x^+ pedig az x elem duális pseudokomplementumát jelöli.

A továbbiakban szükséges és elégséges feltételt fogok megadni arra nézve, hogy egy R kvázirendezés esetén is $\mathcal{RS} = (RS, \leq)$ egy Stone háló legyen. Ennek a bizonyításához vegyük észre a következőket:

Ismert tény, hogy egy halmazon definiált kvázirendezések egy hálót alkotnak. Egy R kvázirendezés esetén a legkisebb ekvivalencia amely tartalmazza R -t nem más, mint $R \vee R^{-1}$, (ahol $R \vee R^{-1}$ az R és R^{-1} relációk szuprémuma a kvázirendezések hálójában). Ismert tény, hogy $R \vee R^{-1}$ megegyezik a $R \cup R^{-1}$ reláció tranzitív lezárásával. Az elmondottak értelmében az R reláció összefüggő komponensei nem mások, mint az $R \vee R^{-1}$ reláció ekvivalencia osztályai.

4.22. Állítás. Legyen R egy kvázirendezés az U univerzumon. Akkor minden minden $X \subseteq U$ -ra a következő kijelentések ekvivalensek:

- a) $\mathcal{A}(X)$ az $\mathcal{RS}$ háló egy komplementumos eleme;
- b) $\mathcal{A}(X)$ az $\mathcal{RS}$ háló egy egzakt eleme;
- c) X tetszőleges $R \vee R^{-1}$ ekvivalencia osztályok uniója.

4.23. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha az $X \subseteq U$ halmaz az $R \cup R^{-1}$ ekvivalencia reláció osztályainak az uniója, akkor X^c vagy üres vagy ugyancsak az $R \cup R^{-1}$ ekvivalencia reláció osztályainak az uniója. Így a 4.22 Állításból következik, hogy $\mathcal{A}(X)$ durva halmaz akkor és csakis akkor az $\mathcal{RS}$ háló egy egzakt eleme, ha $\mathcal{A}(X^c)$ is egzakt elem.

4.24. Tétel. Legyen R egy kvázirendezés U -n. $\mathcal{RS}$ akkor és csakis akkor Stone háló, ha $R^{-1} \circ R = R \vee R^{-1}$.

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy $\mathcal{RS}$ egy Stone háló. Akkor, minden $X \subseteq U$ esetén a pseudokomplementum $\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\Delta c})$. A 4.22. Állításból és a 4.23 Megjegyzésből következik, hogy $\mathcal{A}(X^{\Delta c})$ és $\mathcal{A}(X^{\Delta})$ egzakt eleme $\mathcal{RS}$ -nek. Legyen x az U egy tetszőleges eleme, és a továbbiakban tekintsük az $X = \{x\}$ halmazt. Könnyen észrevehető, hogy $X^{\Delta} = (R^{-1} \circ R)(x)$. A 4.22. Állításból következik, hogy $(R^{-1} \circ R)(x)$ az $R \vee R^{-1}$ ekvivalencia osztályoknak az uniója. Mivel $R^{-1} \circ R \subseteq R \vee R^{-1}$, ezért $(R^{-1} \circ R)(x) = (R \vee R^{-1})(x)$. Az egyenlőség minden $x \in U$ -ra igaz, tehát $R^{-1} \circ R = R \vee R^{-1}$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $R^{-1} \circ R = R \vee R^{-1}$. Tudjuk, hogy $\mathcal{RS}$ egy disztributív pseudokomplementumos teljes háló, és hogy $\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\Delta c})$ pseudokomplementum. Vegyük észre, hogy bármely L pseudokomplementumos háló esetén abból a tényből, hogy minden $x^* \in L$ elemnek van $x^{*'}$ komplementuma L -ben, következik, hogy L Stone háló. Ugyanis akkor $x^{*'} \leq x^{**}$ és $x^* \vee x^{*'} = 1$ -ből $x \vee x^{**} = 1$ következik. Elég tehát azt igazolnunk, hogy tetszőleges $X \subseteq U$ esetén $\mathcal{A}(X)^*$ -nak van komplementuma $\mathcal{RS}$ -ben.

Legyen $X \subseteq U$ és $x \in X^{\Delta}$, $y \in (R \vee R^{-1})(x)$. X^{Δ} definíciója alapján, létezik $z \in R^{-1}(x) \cap X^{\Delta}$ és $v \in R(z) \cap X$. Innen következik, hogy $xR^{-1}z$ és zRv , azaz $(x, v) \in R^{-1} \circ R$ ahol $v \in X$. Akkor $(v, x) \in R \vee R^{-1}$, vagyis $(x, y) \in R^{-1} \vee R$ implikálja $(v, y) \in R \vee R^{-1}$ -t. Így $y \in (R \vee R^{-1})(v) = (R^{-1} \circ R)(v) = \{v\}^{\Delta} \subseteq X^{\Delta}$. Ezáltal megmutattuk azt, hogy $(R \vee R^{-1})(x) \subseteq X^{\Delta}$ minden $x \in X^{\Delta}$ -re, tehát X^{Δ} az $R \vee R^{-1}$ ekvivalencia osztályainak uniója. A 4.22. Állításból következik, hogy $\mathcal{A}(X^{\Delta})$ komplementumos és $\mathcal{RS}$ egzakt eleme. Az előző Megjegyzés alapján $\mathcal{A}(X)^* = \mathcal{A}(X^{\Delta c})$ is egzakt elem, ezért a 4.22. Állításból következik, hogy $\mathcal{RS}$ háló egy komplementumos eleme. Tehát $\mathcal{RS}$ Stone háló. $\square$

Ebben a fejezetben sikerült bebizonyítanom, hogy a durva halmazok hálóját egy R kvázirendezés esetén is egy Kleene algebra, kiterjesztve ezzel a durva halmazok alkalmazhatóságát. A Kleene algebrának a fuzzy elméletben van nagy szerepe, ugyanis a $\cap$, $\cup$, és komplementum képzés műveletére nézve egy Kleene algebrát alkotnak (több komplementum fogalom is értelmezhető, úgy, hogy Kleene algebrát kapunk). Ebben a fejezetben sikerült bebizonyítani azt is, hogy enyhe megszorítások mellett ez a háló is Stone háló hasonlóan ahhoz amit egy R ekvivalencia reláció esetén kapunk.

5. Alkalmazások

Ebben a fejezetben a 3. és 4. fejezetben bemutatott matematikai eredmények alkalmazásait mutatjuk be. Három alkalmazást fogunk bemutatni, az első kettő informatikai jellegű, a harmadik egy csoporttechnológiai alkalmazás. Először egy olyan algoritmust ismertetünk, amely megkonstruálja az új bővített kontextushoz tartozó doboz-extendzió háló egy osztályozási fáját kiindulva a régi kontextus egy osztályozási fájából. Bemutatunk egy módszert, amely optimális módon állítja elő egy bővített kontextushoz tartozó doboz-extendzió hálót. Végül az ún. modális operátorok egy csoporttechnológiai alkalmazását mutatjuk be.

5.1 Osztályozási fa konstruálása a doboz-extendziók hálójában

A 3. fejezetben megvizsgáltuk, hogy egy kontextus objektumhalmazának egy elemű bővítése vagy szűkítése során a kontextushoz tartozó dobozelemek extendziói hogyan változnak. Elemi bővítés alatt a kontextus egy olyan elemmel való bővítését értjük, amelynek a tulajdonságai a már meglévő tulajdonsághalmazból származnak. Megmutattuk, hogy egy elemi kontextusbővítés során a keletkező doboz-extendzió háló valamennyi osztályozási fája előállítható az eredeti, szűkebb kontextus doboz-extendzió hálójának osztályozási fáiból, azok módosításával.

A 3.39 Tétel alapján egy olyan algoritmust konstruálunk amely megadja a bővített (G, M, I) kontextus doboz-extendzió hálójának egy olyan osztályozási fáját, amely tartalmazza az új beszűrt elemet kiindulva egy a szűkebb $(H, M, I \cap H \times M)$ kontextushoz tartozó doboz-extendzió háló egy osztályozási fájából. Az algoritmusban felhasználjuk a 3. fejezetben bemutatott 1. Algoritmust, amely megkeresi a legfinomabb extendzió-partíciót, amelyik tartalmazza az új elemet és a 3.4 fejezetben bemutatott ORTOFA algoritmust, amelyet az eredeti doboz-extendzió háló osztályozási fáinak a megépítésére használunk. Az ORTOFA eljárás nagy előnye, hogy dinamikus tárat használ, nem egy előre lefoglalt memória tárhelyet, ezáltal is felgyorsítva az algoritmusunkat. Az ORTOFA eljáráshoz szükségünk van az eredeti kontextusra, K -ra, a kontextushoz tartozó doboz-extendziókra ezt a DS mátrix tartalmazza, mint azt a 3. fejezetben már említettük,

$$DS[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{ha } g_i \text{ benne van } g_j\text{-ben} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Az 1. algoritmus megadja azt a legfinomabb extenzió-partíciót, amely tartalmazza az új elemet, ezt is ismertnek tekintjük. Az alábbi eljárásban felhasználunk két már az előzőekben definiált függvényt. Egyik a BERAK függvény, amelynek leírása a 3.4 fejezetben található, és amelyet az osztályozási fa megkonstruálásánál is használtunk már, másik pedig a KOBJ(KTUL) függvény, amely szintén szerepelt már az előző fejezetekben, illetve [10]-ben és [29]-ben is megtalálható.

A KOBJ(KTUL) függvény esetén KTUL megkeresi az objektumhalmazok közös tulajdonságait, a KOBJ a közös objektumokat keresi meg és egymás után alkalmazva ezt a két függvényt egy A objektumhalmazra eredményül az A'' halmazt kapjuk.

```

1.  $LISTA\_FA(DS)$  */  $DS(m \times n)$  mátrix
2.  $L \leftarrow DS$  */  $L(m \times n)$  mátrix,  $DS$  dobozelemek
   másolata
3.  $S1 \leftarrow \emptyset$  */  $S1(m \times (n+1))$  mátrix,  $z^{\square\square}$  fölötti
   részháló elemeinek tárolása
4.  $S \leftarrow \emptyset$  */  $S(m \times n)$  mátrix,  $z^{\square\square}$  fölötti lánc
   elemeinek tárolása
5.  $F \leftarrow \emptyset$  */  $F(m \times n)$  mátrix,  $z^{\square\square}$  alatti fa ele-
   meinek tárolása
6.  $k \leftarrow 0$ 
7. for  $i \leftarrow 1$  to  $m$ 
8.   do  $benne \leftarrow true$ 
9.     for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
10.      do if  $z^{\square\square}[j] > L[i][j]$ 
11.        then  $benne \leftarrow false$ 
12.      if  $benne$ 
13.        then  $k++$ 
14.       $BERAK(S1, L[i], k)$  */  $z^{\square\square} - \{z\}$  fölötti
   doboz-extenziókat  $S1$ -ben tároljuk
15. for  $i \leftarrow 1$  to  $k$ 
16.   do  $S1[i][n+1] \leftarrow 1$ 
17.  $A \leftarrow S1^T$ 
18.  $A \leftarrow KOBJ(KTUL(A, K), K)$  */itt  $K$  a bővített kon-
   textust jelenti
19.  $A \leftarrow A^T$ 
20.  $l \leftarrow 0$ 
21. for  $i \leftarrow 1$  to  $k$ 
22.   do  $dext \leftarrow true$ 
23.     for  $j \leftarrow 1$  to  $(n+1)$ 
24.      do if  $A[i][j] \neq S1[i][j]$ 
25.        then  $dext \leftarrow false$ 
26.     if  $dext$ 
27.       then  $BERAK(S, S1[i], l)$ 

```

```

28.  $h \leftarrow 0$ 
29. for  $i \leftarrow 1$  to  $m$ 
30.     do if  $BENNE(L[i], z^{\square\square})$ 
31.         then  $BERAK(F, L[i], h)$ 
32. return  $S, F$ 

```

```

 $BERAK(A, V, m)$ 
1.  $m++$ 
2. for  $t \leftarrow 1$  to  $n$ 
3.     do  $A[m][t] \leftarrow V[t]$ 
4. return  $A, m$ 

```

A módszer hatékonyságát az biztosítja, hogy elég ismernünk az eredeti kontextust, a doboz-extenzió háló egy osztályozási fáját, illetve ennek doboz-extenzióit, nincs szükségünk a bővített kontextushoz tartozó új doboz-extenzió háló elemeire (egy kivételével, ami az új elem doboz-extenziója).

Az eljárás főbb részeit a mátrix műveleteket lebonyolító dupla ciklusok alkotják. Ezek futási idejét, mint az előző algoritmusoknál is, $O(N^2)$ polinomiális idővel jellemezhetjük, ez jelenti a legrosszabb futási időt, amennyiben kellően nagy az $N = \max\{n, m, k\}$ érték. A 7.-14. sorok közt leírt ciklus futási ideje $O(mn^2)$, a KOBJ és KTUL függvények végrehajtásának futási ideje, amint azt a Körei A. [29] dolgozatának 3.6 fejezetében is megállapította, $(O(n^2k))$, a 27.-28. sorok között leírt összetett ciklus időigénye hasonlóan $O(n^2k)$, illetve az utolsó tetemes időigényű ciklus a 29.-31. sorok között ismételt $O(mn^2)$ időigényű. Amennyiben tekintjük az $N = \max\{n, m, k\}$ lépésszámot, az algoritmus maximális futási idejét $O(N^3)$ költséggel jellemezhetjük.

5.2 Doboz-extenziók meghatározása egy kontextus elemi bővítése után

B. Ganter, A. Körei, S. Radeleczki [10] cikkükben és a disszertáció 3. fejezetében, mint azt már említettük, egy kontextus elemi bővítésével foglalkoztunk. A disszertáció 3. fejezetében bemutattuk, hogy a kontextus leszűkítésével kapott részkontextus megőröklí az eredeti kontextus extenzióit, extenzió-partícióit, doboz-extenzióit. Tanulmányoztuk, hogy ha az objektumhalmazt egy elemmel bővítjük, (egy olyan elemmel, amelynek tulajdonságai a meglévő tulajdonsághalmazból vannak), akkor hogyan változnak a doboz-extenziók, az osztályozási fák. Felhasználva a már említett [10] cikk eredményeit és A. Körei [29] dolgozatát, melyben bemutat egy algoritmust egy doboz-extenzió háló felépítésére, egy új eljárást adunk meg doboz-extenzió hálók atomisztikus fogalomhálóból való megkonstruálására. Ez a módszer akkor

előnyös, ha a az eredeti kontextus tartalmaz egy elég nagy méretű atomisztikus részkontextust.

A tételeinknél sokszor ki kellett zárunk azt az esetet, amikor $z^{\square\square} = \{z\}$, mivel ebben az esetben a doboz-extenziók megduplázódhatnak. Ha ezt az esetet sikerül kiküszöbölnünk az algoritmus futási ideje jóval lerövidül.

Legyen $\mathbb{K} = (G, M, I)$ egy kontextus és $\mathcal{B}(G, M, I)$ a hozzá tartozó doboz-extenzió háló. A doboz-extenzió háló megépítésére két módszert is ismerünk, az egyik A. Körei [29] dolgozatában is megtalálható, a módszer lényege, hogy több egymás utáni elemi kontextusbővítés eredményeképpen állítja elő a doboz-extenzió hálót, kiindulva egy lényegesen kisebb $(H, M, I \cap H \times M)$ részkontextus doboz-extenzió hálójából. Az algoritmus hátránya, hogy a lépésszám akár exponenciálisan is növekedhet, annak következtében, hogy amikor $z^{\square\square} = \{z\}$, akkor az új kontextus doboz-extenzióinak a száma megduplázódhat. Ezt a problémát a következőképpen küszöbölhetjük ki. A kontextusból kiválogatjuk egy H listába azokat a g objektumokat, amelyekre $(\{g\}'', \{g\}')$ atom az $\mathcal{L}(G, M, I)$ fogalomhálóban. Elkészítjük az $\mathcal{L}(H, M, I \cap H \times M)$ fogalomhálót. Mivel ez a konstrukciója szerint atomisztikus háló, ezért a hozzá tartozó $\text{Ext}(H, M, I \cap H \times M)$ extenzió háló egybeesik a $(H, M, I \cap H \times M)$ kontextus doboz-extenzió hálójával, $\mathcal{B}(H, M, I \cap H \times M)$ -val. A fogalomháló megépítésére nagyon sok módszer áll rendelkezésünkre, mint azt már a 2. fejezetben is említettük. Használhatjuk a 2. fejezetben bemutatott fogalomhálóépítés „naív” algoritmusát, ha nagyobb kontextusunk van akkor L. Kovács [25] cikkében bemutatott algoritmusát, amely jóval gyorsabb. Most megmutatjuk, hogy ismételt elemi bővítésekkel megkaphatjuk a (G, M, I) kontextus doboz-extenzió hálóját úgy, hogy a $z^{\square\square} = z$ eset egyetlen lépésnél sem következik be:

Tegyük fel, hogy H -ból kiindulva n lépés után eljutottunk a H_n halmazhoz, ahol $H \subset H_n \subseteq G$ és már ismerjük a $\mathcal{B}(H_n, M, I \cap H_n \times M)$ doboz-extenzió hálót. Legyen most $z \in G \setminus H_n$. Akkor $z \notin H$, így $(\{z\}'', \{z\}')$ nem atom $\mathcal{L}(G, M, I)$. De akkor létezik (legalább egy) olyan $x \in \{z\}''$ úgy, hogy $(\{x\}'', \{x\}')$ atom és $\{x\}'' \subsetneq \{z\}''$. Akkor $x \neq z$ és szerkesztés szerint $x \in H$. Tudjuk, hogy a $K_{n+1} = (H_n \cup \{z\}, M, I \cap (H_n \cup \{z\}) \times M)$ kontextusban a z -t tartalmazó legkisebb $\{z\}''^{(n+1)}$ extenzió nem más, mint $\{z\}'' \cap (H_n \cup \{z\})$, ahol $\{z\}''$ az eredeti kontextusban értendő, $\{z\}''^{(n+1)}$ pedig az $(n+1)$ -edik lépésben kapott K_{n+1} kontextusban értendő. Mivel $x \in \{z\}'' \cap H \subseteq \{z\}'' \cap (H_n \cup \{z\})$ ezért $x \in \{z\}''^{(n+1)}$ is teljesül a K_{n+1} kontextusban. Tehát $\{z\}''^{(n+1)} \neq \{z\}$ és így $z^{\square\square}$ a K_{n+1} kontextusban sem lehet egyenlő $\{z\}$ -vel.

A bemutatott módszert a következőképpen valósíthatjuk meg:

A $\mathbb{K}$ kontextus elemeit tároljuk egy $K(m \times n)$ mátrixban, a már ismert módon

$$K[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{ha } (g_i, m_j) \in I \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

A K mátrixban az objektumok a sorindexeknek, az attribútumok pedig az oszlopindexeknek felelnek meg. Az algoritmus ezt a K mátrixot szűkíti le a H -ra oly módon, hogy H -nak csak azon G -beli objektumok maradnak elemei, amelyek zártak tulajdonságaikra nézve, ezek számát a k változó adja majd meg. Az így kapott (H, M, I_H) kontextusunk hasonló $k \times n$ méretű mátrix lesz.

```

1. KONTEXTSZUK( $K$ )
2.  $k \leftarrow 0$ 
3. for  $i \leftarrow 1$  to  $m$ 
4.   do for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
5.     do  $v[j] \leftarrow K[i][j]$ 
6.     if  $v = \text{KOBJ}(\text{KTUL}(E_{n \times n}, K), K)$ 
7.       then  $k++$ 
8.       for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
9.         do  $H[k][j] \leftarrow v[j]$ 
```

Végül egyetlen lépés maradt hátra, az előbb felsoroltak közül valame-lyik algoritmussal megépíteni az új kontextus fogalomhálóját, amely azonos a dobozhálóval és már kezdhetjük is az elemi bővítést. Az elemi bővítéseknél A. Körei [29] dolgozatában ismertetett 5.15. Algoritmusát használhatjuk.

Az eljárás fő ciklusa áll egy ciklusból, amit mindig végrehajt és egy feltételesen végrehajtandó ciklusból. Mindkét ciklus lépésszáma n , így a legrosszabb eset, ha mindent végrehajt, akkor a főcikluson belül a program $n + 2 + n$, azaz $2n$ utasítást hajt végre, így az eljárás összesen $m \cdot (2n)$ utasítást tartalmaz, n és m értékétől függően fix lépésszámmal. Tehát az eljárásunk futási ideje $O(mkn^2)$. (A *KOBJ* és *KTUL* függvények végrehajtásának futási ideje, amint azt a Körei A. [29] cikkében (3.6 alfejezet) is megállapította, $(O(n^2k))$)

5.3. Komplex alkatrészek

Ebben a fejezetben egy csoporttechnológiai alkalmazást fogunk bemutatni, felhasználva az ún. modális operátorokat.

5.3.1. Durva halmazok és fogalomháló kapcsolata

A durva halmazok elmélete és a fogalomanalízis két olyan adatelemzési eljárás, amely összehasonlítható és kombinálható. Ebben a fejezetben összehasonlítjuk és vegyítjük a két elmélet fogalmait. A fejezet alapjául Y. Y. Yao [14]-ben publikált eredményei szolgálnak.

Legyen U és V két nemüres véges halmaz. U elemeit objektumoknak, V elemeit pedig attribútumoknak nevezzük. A köztük lévő kapcsolatot pedig az $R \subseteq U \times V$ reláció adja meg. Az (U, V, R) hármast kontextusnak nevezzük a fogalomanalízisben és bináris információs rendszernek a durva halmaz elméletben.

Egy $x \in U$ objektum és egy $y \in V$ attribútum esetén, ha xRy akkor azt mondjuk, hogy az x objektum rendelkezik az y tulajdonsággal. Egy $x \in U$ objektum attribútumait az x utódjai adják meg:

$$xR = \{y \in V \mid xRy\}.$$

Egy $y \in V$ attribútum esetén y ősei adják meg azoknak az objektumoknak a halmazát, amelyek rendelkeznek az y tulajdonsággal

$$Ry = \{x \in U \mid xRy\}$$

Ezeknek az ismeretében vezessük be a fogalomhálóink definiálásához szükséges modális operátorokat.

Legyen $A \subseteq U$ az objektumok halmaza és $B \subseteq V$ az attribútumok halmaza, akkor bevezethetjük az alábbi operátor párosokat:

$$\begin{aligned} A' &= \{y \in V \mid xRy, \forall x \in A\text{-ra}\} \\ &= \{y \in V \mid A \subseteq Ry\} \\ &= \bigcap_{x \in A} xR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= \{x \in U \mid xRy, \forall y \in B\text{-re}\} \\ &= \{x \in U \mid B \subseteq xR\} \\ &= \bigcap_{y \in B} Ry. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^\square &= \{y \in V \mid Ry \subseteq A\} \\ B^\square &= \{x \in U \mid xR \subseteq B\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^\diamond &= \{y \in V \mid Ry \cap A \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in A} xR \\ A^\diamond &= \{y \in U \mid xR \cap B \neq \emptyset\} = \bigcup_{y \in B} Ry \end{aligned}$$

Megjegyzés: (i) Egy $A \subseteq U$ objektumhalmaz esetén A' a legnagyobb attribútum halmaz, amellyel az A -beli objektumok rendelkeznek, B'

pedig a legnagyobb objektum halmaz, amelynek minden tulajdonsága B -ben van.

(ii) Az első két operátor esetén Yao eredeti A^* , B^* jelöléseit módosítottuk az előző fejezetekben használt jelölésekkel összhangban A' , B' -re.

Egy (A, B) párt, ahol $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, az (U, V, R) kontextus egy **fogalmának** nevezzük, ha $A = B'$ és $B = A'$. (Az (U, V, R) kontextushoz tartozó fogalmak összessége egy teljes hálót alkot, azt neveztük a kontextus **fogalomhálójának**.)

A fentebb definiált modális operátorok segítségével Y. Y. Yao két különböző „fogalomhálót” szerkesztett meg (megjegyeznénk, hogy ezek nem a „hagyományos” értelemben lesznek fogalomhálók):

A.) objektum-orientált „fogalomháló”

Egy (A, B) párt, ahol $A \subseteq U$ és $B \subseteq V$, **objektum-orientált fogalomnak** nevezünk, ha

$$A = B^\diamond \text{ és } B = A^\square.$$

Ha egy objektum egy B -beli tulajdonsággal rendelkezik, akkor ez az objektum A -ban van, mi több, csak A -beli objektumok rendelkeznek B -beli tulajdonságokkal. Az A -beli objektumokat az (A, B) fogalom **extenziójának** nevezzük, a B -beli tulajdonságokat pedig a fogalom **intenziójának**.

Az objektum-orientált fogalmak halmazán definiálhatunk egy részbenrendezést a következőképpen:

Legyen (A, B) , (C, D) két objektum-orientált fogalom, akkor

$$(A, B) \leq (C, D) \iff A \subseteq C \text{ (} \iff B \subseteq D \text{)}$$

Az objektum-orientált fogalmak összessége egy teljes hálót alkot a fenti rendezésre nézve, ahol két (A_1, B_1) , (A_2, B_2) objektum-orientált fogalom szuprémuma és infimuma a következőképpen írható fel:

$$(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) = ((B_1 \cap B_2)^\diamond, B_1 \cap B_2) = ((A_1 \cap A_2)^{\square\diamond}, B_1 \cap B_2)$$

$$(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) = (A_1 \cup A_2, (A_1 \cup A_2)^\square) = (A_1 \cup A_2, (B_1 \cup B_2)^{\square\diamond}).$$

Egy $A \subseteq U$ objektumhalmaz esetén igaz az $A^{\square\diamond} = A^\square$ egyenlőség, azaz az objektum-orientált fogalom $(A^{\square\diamond}, A^\square)$ alakú, egy $B \subseteq V$ attribútumhalmaz esetén pedig a tulajdonság-orientált fogalom $(B^\diamond, B^{\square\diamond})$ alakú lesz.

B.) tulajdonság-orientált „fogalomháló”

Egy (A, B) párt, ahol $A \subseteq U$ és $B \subseteq V$, **tulajdonság-orientált fogalomnak** nevezünk, ha

$$A = B^\square \text{ és } B = A^\diamond.$$

Az A -beli objektumok csak B -beli tulajdonságokkal rendelkezhetnek.

A tulajdonság-orientált fogalmak összessége egy hálót alkot egy ugyanúgy definiált részbenrendezésre nézve mint az objektum-orientált fogalmak esetén. Két (A_1, B_1) , (A_2, B_2) tulajdonság-orientált fogalom szuprénuma és infimuma a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned}(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) &= (A_1 \cap A_2, (A_1 \cap A_2)^\diamond) = (A_1 \cap A_2, (B_1 \cup B_2)^{\square\diamond}) \\ (A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) &= ((B_1 \cup B_2)^\square, (B_1 \cup B_2)^\diamond) = \\ &= ((A_1 \cup A_2)^{\diamond\square}, (B_1 \cup B_2)^\diamond).\end{aligned}$$

Egy $A \subseteq U$ objektumhalmaz esetén a tulajdonság-orientált fogalom $(A^{\diamond\square}, A^\diamond)$ alakú, egy $B \subseteq V$ attribútumhalmaz esetén pedig a tulajdonság-orientált fogalom $(B^{\square\diamond}, B^\square)$ alakú lesz.

Ezek az "operátorok" egyéb érdekes tulajdonságokkal is rendelkeznek:

$$A_1 \subseteq A_2 \implies A_1^\diamond \subseteq A_2^\diamond, \quad B_1 \subseteq B_2 \implies B_1^\square \subseteq B_2^\square, \quad A^{\diamond\diamond\square} = A^\diamond.$$

Ezeknek az összefüggéseknek egy fontos következménye, hogy a $\mathcal{Z} : A \rightarrow A^{\diamond\square}$ ($A \subseteq U$) megfeleltetés egy zárási operátor a G halmazon, ami azt jelenti, hogy minden A , A_1 , $A_2 \subseteq U$ -ra:

$$A \subseteq A^{\diamond\square}, \quad A_1 \subseteq A_2 \implies A_1^{\diamond\square} \subseteq A_2^{\diamond\square} \text{ és } (A^{\diamond\square})^{\diamond\square} = A^{\diamond\square}.$$

5.3.2. Komplex alkatrészek megkonstruálása

A csoporttechnológiában az alkatrészgyártás megtervezése, illetve a gyártócellák kialakítása a különböző alkatrészek, technológiai folyamatok közötti hasonlóság felhasználásán alapszik, ezt nevezzük csoportmódszernek. Az alkatrészek gyártását nagyban megkönnyíti, ha az alkatrészeket meghatározott rendszer szerint csoportosítjuk. A csoportok kialakításánál számításba kell venni az alkatrészek méreteit, a geometriai alakját, a megmunkálendő felületek azonosságát, a nyersdarabok hasonlóságát, a megmunkálás gazdaságosságát, a legyártandó alkatréשמennyiséget. Az alkatréscsoportok kialakításánál a csoport egy olyan jellegzetes alkatrészéből indulunk ki, amelyet komplex alkatrésznek nevezünk. Ez az alkatrész az adott csoport összes tulajdonságait tartalmazza. A csoporthoz tartozó összes többi alkatrészt is ezen tulajdonságok egy része jellemez. A komplex alkatrész megtervezésénél abból kell kiindulni, hogy a csoport minden alkatrészét ugyanazzal a technológiai folyamattal lehessen megmunkálni, azonos vagy fokozatos gépbeállítással és azonos típusú szerszámokkal. A komplex alkatrésznek tartalmaznia kell a csoporthoz tartozó alkatrészek összes geometriai jellemzőit, az elkészítéséhez összeállított művelettervnek pedig jelentéktelen módosításokkal alkalmasnak kell lennie a csoport bármely másik alkatrészének elkészítésére.

Először vizsgáljuk meg hogyan értelmezhetjük egy kontextuson a már említett modális operátorokat.

Legyen $\mathbb{K} = (G, M, I)$ egy kontextus, ahol G az alkatrészek összességét jelöli, M pedig ezek (műszaki) tulajdonságainak az összességét. Egy $g \in G$ alkatrész és egy $m \in M$ tulajdonság esetén pedig gIm azt jelenti, hogy g rendelkezik az m tulajdonsággal.

G és M részhalmazai között értelmezzük a következő megfeleltetéseket (operátorokat):

$$A \subseteq G \text{ esetén } A^\diamond = \{m \in M \mid gIm \text{ legalább egy } g \in A\text{-ra}\}$$

($A^\diamond$ -t tehát úgy kapjuk meg, hogy egy halmazba gyűjtünk minden olyan m attribútumot amellyel legalább egy A -beli objektum rendelkezik.)

$$B \subseteq M \text{ esetén } B^\square := \{g \in G \mid gIm \implies m \in B\}$$

($B^\square$ azoknak az objektumok összessége, amelyek valamennyi attribútuma B -ben megtalálható).

Azokat az (A, B) , $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ halmazpárokat, amelyek teljesítik a $B = A^\diamond$ és az $A = B^\square$ összefüggéseket, a 5.3.1. fejezetben tulajdonság-orientált fogalmaknak neveztük. Megmutattuk, hogy a tulajdonság-orientált fogalmak összessége egy teljes hálót alkot. Egy $A \subseteq G$ objektumhalmaz esetén a tulajdonság-orientált fogalom („analóg” fogalom) $(A^{\diamond\square}, A^\diamond)$ alakú.

A komplex alkatrészeket a G alkatrészhalmaz partícionálására használjuk, pontosabban arra, hogy G elemeit besoroljuk G legfinomabb olyan $\pi = \{A_i \subseteq G \mid i \in I\}$ partíciójába, amelynek minden A_i , $i \in I$ halmaza (blokkja) a hozzátartozó alkatrészek tulajdonságai alapján jellemezhető. Az A_i halmazhoz tartozó $c(A_i)$ komplex alkatrész úgy is tekinthető mint egy tulajdonságlista, ami azokat és csak azokat a tulajdonságokat tartalmazza, amelyek legalább egy $g \in A_i$ alkatrészen előfordulnak. Tehát $c(A_i)$ egyenlő lesz $A_i^\diamond$ -al, ha teljesül még az a feltétel is, hogy minden olyan $g \in G$ alkatrész aminek a tulajdonságai rajta vannak ezen a listán, az A_i halmazhoz tartozik, ez azt jelenti, hogy $A_i^{\diamond\square} = A_i$ összefüggésnek is teljesülnie kell. A (G, M, I) kontextusból kiindulva tehát meg kell keresnünk a G alkatrészhalmaz azon legfinomabb $\pi^\diamond = \{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ partícióját aminek minden egyes A_i , $i \in I$ blokkja teljesíti az $A_i^{\diamond\square} = A_i$ összefüggést. Ekkor az A_i , $i \in I$ halmazokhoz tartozó komplex alkatrészek éppen az $A_i^\diamond$, $i \in I$ tulajdonságlisták lesznek.

Első lépésként megépítjük a kontextushoz tartozó $\overline{\mathbb{K}} = (G, M, \lceil I)$ komplementer kontextust (a gyakorlatban ez azt jelenti, hogy ahol az eredeti kontextusban 1-es volt oda 0 kerül és fordítva). Bebizonyítjuk, hogy $A_i^{\diamond\square} = A_i$ pontosan akkor teljesül, ha $A_i^{-I-I} = A_i$. Ehhez elegendő belátni, hogy $A_i^{\diamond\square} = A_i^{-I-I}$, ahol $A_i^{\diamond\square}$ -t az eredeti kontextusban értjük.

Mivel $A^\diamond = \{m \in M \mid gIm \text{ legalább egy } g \in A\text{-ra}\}$, ezért a komplementere $\overline{A^\diamond} = \{m \in M \mid g\neg Im \text{ minden } g \in A\text{-ra}\}$.

$$\begin{aligned} A_i^{\diamond\Box} &= \{g \in G \mid gIm \implies m \in A^\diamond\} = \{g \in G \mid \{g\}^I \subseteq A^\diamond\} = \\ &= \{g \in G \mid \overline{A^\diamond} \subseteq \{g\}^{\neg I}\} = \{g \in G \mid A^{\neg I} \subseteq \{g\}^{\neg I}\} = \\ &= \{g \in G \mid \text{minden } m \in A^{\neg I}\text{-re } (m, g) \in \neg I\} = A_i^{\neg I \neg I} \end{aligned}$$

Következtetés. A $\pi^\diamond = \{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ partíció nem más, mint a $\overline{\mathbb{K}} = (G, M, \neg I)$ komplementer kontextus legfinomabb extenzió-partíciója.

Ezek ismeretében bemutatok egy eljárást a komplex alaktrészek meghatározására. Első lépés, hogy beolvassuk a kontextus mátrixát és meghatározzuk a komplementer kontextust. A komplementer kontextus legfinomabb extenzió-partícióinak meghatározására a 3. fejezetben bemutatott *finextpart* algoritmust használjuk. Az így kapott legfinomabb extenzió-partíció $\pi^\diamond = \{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ minden elemének megkeressük a tulajdonságait az eredeti kontextusban és végül megkapjuk a komplex alaktrészt, amely egy olyan virtuális vagy valós alakt rész, amelynek tulajdonságai nem mások, mint az előzőleg meghatározott tulajdonsághalmaz elemei.

KOMPLEXALKATRESZ

$K_q := 1_E \setminus K$ $\quad \quad \quad */q$ a K_q mátrix sorvektorai azaz az objektumok

$FINEXTPART(\pi^\diamond)$

$C := \emptyset$

Minden $A_i \in \pi^\diamond$ esetén

Minden $g_j \in A_i$ esetén

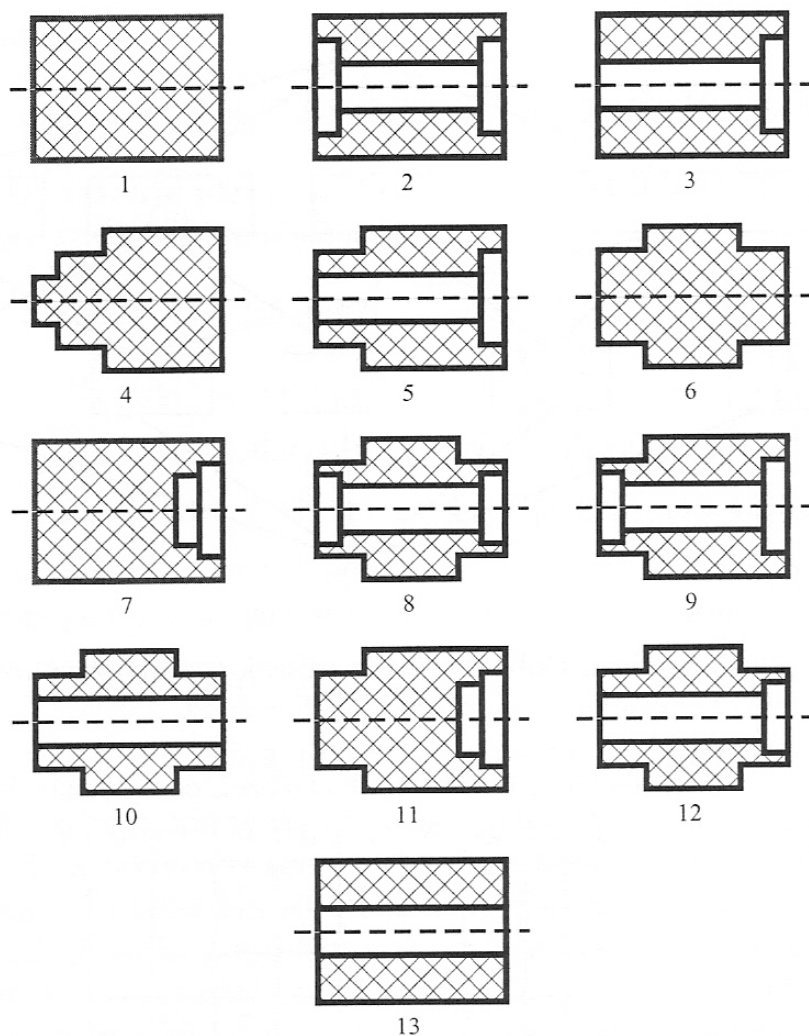
ha $(g_j)' := A_i^\diamond$ akkor

$C := C \cup g_j$

A következő példán bemutatjuk az eljárás működését. (A 7. ábrán látható rajzok Vadász Dénes kandidátusi értekezéséből származnak [45]). Tekintsük a 7. ábrán látható alaktrészeket, melyek azonos anyagból készülnek, befoglaló méreteik megegyeznek, megmunkálási idejük azonban eltérő. Az alaktrészek az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

- a) átfúrt
- b) nem átfúrt
- c) belülről lépcsőzött egy irányból
- d) belülről lépcsőzött mindkét irányból
- e) belülről nem lépcsőzött
- f) kívülről lépcsőzött egy irányból
- g) kívülről lépcsőzött mindkét irányból

Az alaktrészeket és az őket jellemző tulajdonságokat a 4. táblázatban egy formális $\mathbb{K}$ kontextusban ábrázoljuk. Ezután megépítjük a K kontextushoz tartozó komplementer kontextust, melyet a 5. táblázatban mutatunk be.



7. Ábra Alkatrészek

$\overline{K}$	a	b	c	d	e	f	g
1		x			x		
2	x			x			
3	x		x				
4		x			x	x	
5	x		x			x	
6		x			x		x
7		x	x				
8	x			x			x
9	x			x		x	
10	x				x		x
11		x	x			x	
12	x		x				x
13	x				x		

4. táblázat Az alkatrészek kontextusa

$\overline{K}$	a	b	c	d	e	f	g
1	x		x	x		x	x
2		x	x		x	x	x
3		x		x	x	x	x
4	x		x	x			x
5		x		x	x		x
6	x		x	x		x	
7	x			x	x	x	x
8		x	x		x	x	
9		x	x		x		x
10		x	x	x		x	
11	x			x	x		x
12		x		x	x	x	
13		x	x	x		x	x

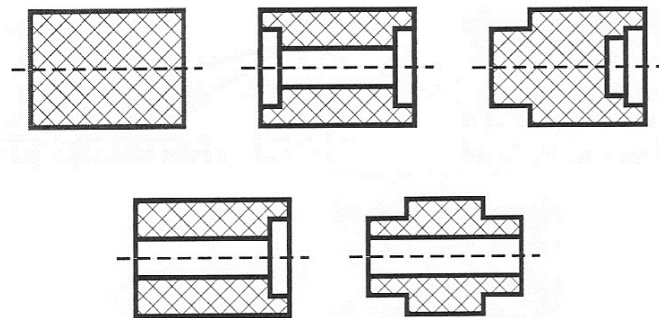
5. táblázat A komplementer kontextus

A finextpart függvény futásának eredményeként kapott legfinomabb extenzió-partíció elemei a következők:

$$\pi^\diamond = (\{1, 4, 6\}, \{2, 8, 9\}, \{7, 11\}, \{3, 5, 12\}, \{10, 13\})$$

Megkeresve a legfinomabb extenzió-partíciók elemeihez tartozó tulajdonságokat az eredeti kontextusban megkapjuk a keresett komplex alkatrészeket. A komplex alkatrészeket tulajdonságlistájukkal adjuk meg, majd ábrázoljuk őket:

$$\begin{aligned} (C_1)' &= \{b, e\} \\ (C_2)' &= \{a, d\} \\ (C_3)' &= \{b, c, f\} \\ (C_4)' &= \{a, c\} \\ (C_5)' &= \{a, e, g\} \end{aligned}$$



8. Ábra Komplex alkatrészek

6. Új tudományos eredmények

6.1. Osztályozási fák és CD-independens halmazok

A fogalomanalízisben és az informatikában is régóta ismert az osztályozási fa fogalma. A műszaki gyakorlatban egy osztályozási fát az objektumoknak (alkatrészeknek) egyre finomabb osztályozási rendszereinek a láncaként kapunk meg. Az osztályozási fa fogalmát általánosítottam úgy, hogy az részbenrendezett hamazokban is értelmezhető.

Kiindulva a Czédli Gábor által bevezetett CD-independens halmaz fogalmából, megvizsgáltam hogy ezek milyen kapcsolatban állnak egy korlátozott hálóban definiált maximális osztályozási fákkal, illetve egy általam bevezetett speciális tolerancia osztályával. A 3.31 Tételből kiindulva kidolgoztam egy algoritmust ami a doboz-extenziók hálójában ortogonális rendszerek egy láncából hoz létre osztályozási fát.

A 3.22 Tétel, 3.26 Állítás és 3.31 Tétel alapján az alábbi tézist állítom fel:

1. Tézis:

Ekvivalens állításokat fogalmaztam meg és bizonyítottam az osztályozási fák és CD-bázisok közötti kapcsolatról. Kidolgoztam és hatékonyság szempontjából elemeztem egy olyan algoritmust, ami ortogonális rendszerek segítségével hoz létre osztályozási fát.

Az 1. Tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 3. fejezete, illetve [V2], [V3] és a [V4] publikációk tartalmazzák.

6.2. Osztályozási fák a doboz-extenziók hálójában

A B. Ganter, A. Körei, S. Radeleczki [10] cikkükben tanulmányozták hogyan változik a dobozháló, ha a kontextust egy elemmel bővítjük. Megvizsgálták, hogy egy kontextus doboz-extenziói milyen esetben maradnak doboz-extenziók az új kontextusban. A matematikai eredményekből kiindulva algoritmust dolgoztak ki a dobozháló inkrementális felépítésére. Ezekből az eredményekből kiindulva definiáltam a teljes osztályozási fát (műszaki értelemben vett osztályozási fát), melyről megmutattam, hogy minden eleme doboz-extenzió, azaz valójában meg egyezik egy a doboz-extenziók hálójából kiválasztott osztályozási fával. Bebizonyítottam, hogy egy elemi kontextusbővítés során a keletkező új

doboz-extenzió háló valamennyi osztályozási fája megkapható az eredeti, szűkebb kontextus doboz-extenzió hálójának az osztályozási fáiból azok módosításával. A módszer hatékonyságát az biztosítja, hogy elég ismernünk az eredeti dobozháló egy osztályozási fáját, illetve ennek doboz-extenzióit, nincs szükségünk a bővített kontextushoz tartozó új dobozháló elemeire (egy kivételével, ami az új elem doboz-extenziója).

A disszertáció 3.5 fejezetének eredményei alapján a következő tézist fogalmazom meg:

2. Tézis:

Megvizsgáltam a kontextus szűkítésének és bővítésének hatását az osztályozási fákra a doboz-extenziók hálójában. Igazoltam, hogy egy elemi bővítés után az új kontextus doboz-extenzió hálójának valamennyi osztályozási fája megkonstruálható a régi kontextushoz tartozó osztályozási fák módosításával. Algoritmust dolgoztam ki egy elemi bővítés során kapott kontextus osztályozási fáinak megkonstruálására.

6.3. Durva halmazok

A durva halmazok szakirodalmának alapos áttekintése után, bebizonyítottam, hogy egy kvázirendezéssel definiált durva halmazok egy teljesen disztributív teljes hálót alkotnak. Megmutattam, hogy ez nem egy komplementumos háló, de három, a komplementumképzés műveletéhez hasonló, unáris művelet is definiálható rajta. Szükséges és elégséges feltételt fogalmaztam meg arra nézve, hogy a kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálója mikor lesz Stone háló.

A disszertáció 4.3 és 4.4 fejezetének eredményei alapján a következő két tézist fogalmazom meg:

3. Tézis:

Bebizonyítottam, hogy egy kvázirendezéssel definiált durva halmazok teljesen disztributív teljes hálót alkotnak. Ez a háló egy rajta természetes módon definiált de Morgan művelettel együtt egy Kleene algebrát alkot.

4. Tézis:

Megfogalmaztam és bizonyítottam annak a szükséges és elégséges feltételét, hogy a kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálója Stone hálót alkosson. Ekvivalens állításokat fogalmaztam meg a háló tulajdonságaira vonatkozóan.

Az 3. Tézis és 4. Tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 4. fejezete, illetve [V1] publikáció tartalmazza.

Felhasználva a durva halmazok elmélete és a fogalomanalízis közötti kapcsolatot, a modális operátoroknak egy csoporttechnológiai alkalmazását mutatom be. Az alkatrészek gyártását nagyban megkönnyíti, ha az alkatrészeket meghatározott rendszer szerint csoportosítjuk. A csoportok kialakításánál számításba kell venni az alkatrészek méreteit, a geometriai alakját, a megmunkálendő felületek azonosságát, a nyersdarabok hasonlóságát, a megmunkálás gazdaságosságát, a legyártandó alkatréשמennyiséget. Az alkatréscsoportok kialakításánál egy olyan jellegzetes alkatrészből indulunk ki, amely az adott csoport összes tulajdonságait tartalmazza. A komplex alkatrész megtervezésénél abból kell kiindulni, hogy a csoport minden alkatrészét ugyanazzal a technológiai folyamattal lehessen megmunkálni, azonos vagy fokozatos gépbeállítással és azonos típusú szerszámokkal. A gondolatmenet egyszerű: egy kontextusban eltároljuk a legyártandó alkatrészeket (objektumokat) és ezek tulajdonságait. Megszerkeszttem a kontextushoz tartozó komplementer kontextust (úgy is mondhatnánk, hogy a kontextus ellentettjét) és megkeresem ennek a legfinomabb extenzió-partícióját. Következő lépésként megkeressük a legfinomabb extenzió-partíció elemeinek a tulajdonságait az eredeti kontextusban és végül megkapjuk a komplex alkatrészt, amely egy olyan virtuális vagy valós alkatrész, amelynek tulajdonságai nem mások, mint az előzőleg meghatározott tulajdonsághalmaz elemei.

A disszertáció 5.3 fejezetének eredményei alapján a következő tézist fogalmazom meg:

5. Tézis:

Kidolgoztam egy módszert és egy algoritmust, amely egy alkatrész-tulajdonság típusú kontextusból kiindulva modális operátorok segítségével meghatározza az adott alkatréshalmazhoz tartozó komplex alkatrészeket.

Az 5. Tézis alapjául szolgáló tételeket és bizonyításokat a disszertáció 5.3 fejezete illetve [V9] publikáció tartalmazza.

7. További kutatási feladatok

A kutatás továbbfejlesztésére több ötlet is kínálkozik. Az egyik irány az adott: tovább vizsgálni a kvázirendezéssel definiált durva halmazok matematikai hátterét. A durva halmazok alkalmazási területei napról-napra bővülnek. Az adatbányászatban újabban olyan algoritmusokat implementálnak, amelyeknek alapjául a fuzzy durva halmazok szolgálnak. Ezen a területen az alkalmazások lehetősége szinte korlátlan. A legfrissebb kutatási eredmények az adatbányászatban már ötvözik a fuzzy elméletet és a durva halmazok elméletét a fogalomanalízissel. További célkitűzéseim között szerepel ezeknek a friss kutatási eredményeknek a tanulmányozása és ezeknek a kutatásában való részvétel.

Egy másik feladat a 3. fejezetbeli algoritmusok optimalizálása, például azzal, hogy nem egy előre lefoglalt tárhellyel dolgozunk (a doboz-extenziókat nem egy mátrixban tároljuk), hanem dinamikus tárat használunk, ahol csak annyi elemnek foglalunk helyet a memóriában, amelyekkel valóban dolgozunk, ezáltal az algoritmusok időigénye javul. A 3. fejezetben végzett tanulmányok alapján egy olyan algoritmus megírása célozható meg, amely csoporttechnológiában alkalmazható. Kisebb gyáraknál komoly gondot okoz ha egy új alkatrész, egy új termék gyártására kell átálljanak. A teljes osztályozási fák és elemi kontextusbővítés alkalmazásával az átállási idő és ezáltal az átállás költsége is csökkenthető. Az 5.2 fejezetben bemutatott módszer segítségével az osztályozási fák számosságára és nagyságára nézve is az atomisztikus háló segítségével becslést tudunk adni.

8. Összefoglalás

A disszertáció első része a fogalomhálók, dobozhálók elméletéhez kapcsolódik. A fogalomháló az ún. kontextusból generálható, amely nem más mint az objektumok és az őket jellemző tulajdonságok közötti kapcsolat. A dobozháló általában a fogalomhálónál kevesebb elemet tartalmaz, ráadásul atomisztikus háló, és elemeit közvetlenül a kontextusból is megkaphatjuk.

Részbenrendezett halmaz esetén bevezettem az osztályozási fa fogalmát és algoritmust írtam az osztályozási fa megkonstruálására a doboz-extenziók hálójában. Megvizsgáltam hogyan változik az osztályozási fa ha a kontextust egy új elemmel bővítjük. Olyan tételeket igazoltam amelyek segítségével megkonstruálhatjuk a bővített kontextus egy osztályozási fáját kiindulva a szűkebb (még nem bővített) kontextus osztályozási fájából.

A durva halmazok elméletének alapos áttanulmányozása után bebizonyítottam, hogy a kvázirendezéssel definiált durva halmazok egy hálót alkotnak, mégpedig egy teljesen disztributív teljes hálót. Megadtam a kvázirendezéssel definiált durva halmazok hálójának néhány jellegzetes tulajdonságát is.

A durva halmazok elméletének és a fogalomanalízis összefonódásából keletkezett ún. modális operátoroknak egy csoporttechnológiai alkalmazását is bemutatom a komplex alkatrészek meghatározására.

A kutatás elején megfogalmazott célkitűzéseknek megfelelően a témák matematikai, informatikai és műszaki vonatkozását is egyaránt tanulmányoztam. Igyekeztem szilárd matematikai alapokon nyugvó algoritmusokat kidolgozni vagy a már meglévő módszereket optimalizálni.

9. Summary

This PhD dissertation contains new results about classification trees, elementary extensions of a context and rough sets determined by quasi-order relations. We give also some algorithms for the construction of a classification tree in the lattice of box extents. The effect of an elementary context extension on the lattice of box extents of a context and on the classification trees corresponding to this lattice is also studied. We also show an application of the modal operators (defined in rough set theory) in Group Technology for finding complex components.

Thesis 1 : Classification trees and CD-independent sets

I formulated and demonstrated some equivalent assertions concerning the relation between classification trees and CD-bases. I evaluated and analyzed for efficiency an algorithm for constructing classification trees by using orthogonal systems.

Thesis 2 : Classification trees in the lattice of box extents of a context

I have studied the effect of elementary extension and reduction of a context on classification trees in the lattice of the box extents of the context. In the case of an elementary context extension, I have elaborated an algorithm which constructs the classification trees of the lattice of box extents of the new context by modifying the classification trees belonging to (box extents lattice of) the old context.

Thesis 3 : Rough sets defined by a quasiorder relation

I proved that the rough sets defined by a quasiorder relation form a completely distributive complete lattice. This lattice together with a de Morgan operation defined on it (in a natural way) is a Kleene algebra.

Thesis 4: The Stone lattice of rough sets defined by a quasi-order relation

I answered the question when the rough sets determined by a quasi-order form a Stone lattice. I formulated and proved some equivalent assertions concerning the properties of this lattice of rough sets.

Thesis 5: Modal operators

As an application to Group Technology problems, I developed a new method and an algorithm, based on modal operators defined on a context, for determining the complex components corresponding to a manufacturing process.

Az értekezés témakörében készített saját publikációk

- [V1] Järvinen J., Radeleczki S., Veres L.: *Rough sets determined by quasiorders*. Order 26 (2009), 337-355. (IF=0,333)
- [V2] Veres L.: *CD-independent sets and orthogonal systems*. Tavaszsi Szél konferenciakiadvány 2010, Pécs, 611-612;
- [V3] Veres L.: *Generalization of classification trees for a poset*. Creative Mathematics and Informatics, Vol.17, 2008, 72-77;
- [V4] Veres L.: *Classification trees and orthogonal systems*. microCAD 2007 International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2007, 63-68;
- [V5] Veres L.: *Zárt halmazok hálójának néhány sajátossága*. Tavaszsi Szél konferenciakiadvány 2007, Budapest, 2007, 340-344;
- [V6] Veres L.: *Fogalomhálók és osztályozási fák*. microCAD 2006 International Scientific Conference, Vol. G, Miskolc, 2006, 101-107;
- [V7] Veres L.: *Osztályozási fák részbenrendezett halmazokban*. Doktoranduszok Fóruma Szekciókiadvány, Miskolc, 2006, 240-245;
- [V8] Veres L.: *Fogalomhálók és osztályozási fák*. Doktoranduszok Fóruma Szekciókiadvány, Miskolc, 2005, 238-243.
- [V9] Radeleczki S., Tóth T., Veres L.: *Modal operators in Group Technology*. (manuscript)
- [V10] Veres L.: *Elemi kontextusbővítés és osztályozási fák*. (manuscript)

Hivatkozott irodalom

- [1] Bukszár Z.: Fogalomhálókon alapuló adatbányászási technológiák. Diplomamunka, Miskolci Egyetem, 2001.
- [2] Cormen T. H., Leiserson C. E. , Rivest R. L.: Algoritmusok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1997.
- [3] Czédli G.: Hálóelmélet. Egyetemi jegyzet, JATE, Szeged, 1996.
- [4] Czédli G. and Schmidt E. T.: CDW-independent subsets in distributive lattices, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 75 (2009), 49-53.
- [5] Czédli G., Hartmann M. and Schmidt E. T.: CD-independent subsets in distributive lattices, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 74/1-2 (2009), 127-134.
- [6] Davey B. A., Priestley H. A.: *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] Földes S., Radeleczki S.: On interval decomposition lattices. *Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications* 24 (2004), p. 95-114.
- [8] Freese R., Ježek J. And Nation J.B.: *Free lattices*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 42, Amer. Math. Soc., Providence, 1995.
- [9] Ganter B., Wille R.: *Formal Concept Analysis, Mathematical Foundations*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1999).
- [10] Ganter B., Körei A., Radeleczki S.: Extent partitions and context extensions. (in print)
- [11] Gehrke M., Walker E.: On the structure of rough sets, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics* 40, 1992, 235-245
- [12] Godin R., Missaoui R., Alaoui H.: Incremental concept formation algorithms based on Galois lattices. *Computational Intelligence*, 11(2), 1995, 246-267.
- [13] Grätzer G.: *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2003.
- [14] Hassanien A. E., Suraj Z., Slezak D., Lingras P. (eds): *Rough Computing: Theories, Technologies and Applications*, Information Science Reference, Hershey-New York, 2008
- [15] Horváth E. K. and Radeleczki S.: A note on CD-independent subsets (manuscript)

- [16] Iványi A.: Informatikai algoritmusok 2. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2005.
- [17] Iwiński T. B.: Algebraic approach to rough sets. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics 35, 1987, 673-683
- [18] Järvinen J.: Knowledge Representation and Rough Sets, PhD Dissertation, University of Turku, Department of Mathematics, March 1999, TUCS Dissertations 14.
- [19] Järvinen J.: Rough sets defined by tolerances, Software technology. Proceedings of the Fenno-Ugric Symposium, August 19-21, 1999, Sagadi, Estonia, pp. 247-257.
- [20] Järvinen J.: On the Structure of Rough Approximations, TUCS Technical Report, March 2002.
- [21] Järvinen J.: The ordered set of rough sets, Rough Sets and Current Trends in Computing 2004, Lecture Notes in Artificial Intelligence 3066 (Springer, Heidelberg 2004) pp. 49-58.
- [22] Järvinen J.: Properties of Rough Approximations, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Vol.9,No.5, 2005
- [23] Järvinen J.: Lattice Theory for Rough Sets, Transactions on Rough Sets, VI, Lecture Notes in Computer Science 4374 (Springer, Heidelberg 2007) pp. 400-498.
- [24] Kent R. E.: Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery. Springer Verlag, 1994.
- [25] Kovács L.: Algorithms for Building Concept Set and Concept Lattice. Production Systems and Information Engineering, 1, 2003, 91-106.
- [26] Kovács L.: Generating Decision Tree from Lattice for Classification. Proceeding of ICAI07, Eger, 2007, 377-385.
- [27] Körei A.: Osztályozási feladatok megoldása dobozhálókkal. Doktoranduszok Fóruma Szekciókiadvány, Miskolc, 2004, 157-164.
- [28] Körei A. and Radeleczki S.: Box elements in a concept lattice. Contribution to ICFCFA 2006, Editors Bernhard Ganter, Leonard Kwuida, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Drezda 2006.
- [29] Körei A.: Fogalomháló alkalmazása osztályfelbontási problémákra. PhD értekezés, Miskolc, 2008

- [30] Kusiak A.: The Generalized Group Technology Concept. International Journal of Production Research, 25, 1987, 561-569.
- [31] Lovász L.: Algoritmusok bonyolultsága. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
- [32] Mitrofanov Sz.P.: A csoportmegtérítés technológiai alapjai. Műszaki könyvkiadó, 1962.
- [33] Pawlak Z.: Rough Sets”, International Journal of Computer and Information Sciences 5, pp. 341-356, 1982.
- [34] Pomkała J. S., P Pomkała J. A.: The Stone Algebra of Rough Sets, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics 36 (1988) 495–512.
- [35] Radeleczki S.: Fogalomhálók és alkalmazásuk a csoporttechnológiában. Proceedings of International Computer Science, microCAD, Miskolc, 1999, 3-8.
- [36] Radeleczki S.: Classification systems and the decomposition of a lattice into direct products. Mathematical Notes, Vol.1. No.1, 2000, 145-156.
- [37] Radeleczki S.: Classification systems and their lattice. Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applicationes 22, 2002, 167-181.
- [38] Radeleczki S., Tóth T.: Fogalomhálók és fuzzy módszerek kapcsolata és alkalmazásuk a csoporttechnológiában. Kutatási jelentés, Miskolci Egyetem, 1999.
- [39] Radeleczki S., Tóth T.: Fogalomhálók alkalmazása a csoporttechnológiában. Osztályozórendszerek matematikai alapjainak összehasonlító vizsgálata. Kutatási jelentés, Miskolci Egyetem, 2001.
- [40] Slowinski R., Vanderpooten D.: A Generalized Definition of Rough Approximations Based on Similarity, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 12 (2000) 331–336.
- [41] Ju. A. Szejder: Egyenlőség, hasonlóság, rendezés. Gondolat (1975), Budapest.
- [42] Stone A. H.: On partitioning ordered sets into cofinal subsets. Mathematika 15, 1968, 217-222.
- [43] Szász G.: Hálóelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

- [44] Trotter, W. T.: Combinatorics and Partially Ordered Sets, Dimension Theory, The Johns Hopkins University Press, Baltimore-London, 1992.
- [45] Vadász D.: Tengely- és tárcsaszerű alkatrészek műveleti sorrendtervezésének automatizálása. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1982.
- [46] Wille R.: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: Ivan Rival (editor), Ordered Sets, Reidel, Dordrecht-Boston, 1982, 445-470.
- [47] Wille R.: Subdirect decomposition of concept lattices. Algebra Universalis 17, 1983, 275-287.
- [48] Yao Y. Y., Lin T. Y.: Generalization of Rough Sets using Modal Logics, Intelligent Automation and Soft Computing 2, pp. 103-120, 1996.
- [49] Yao Y. Y.: On generalizing Pawlak approximation operators, Rough Sets and Current Trends in Computing, Proceedings of the First International Conference, RSCTC'98, LNAI 1424, pp. 298-307, 1998.
- [50] Yao, Y. Y.: On generalizing rough set theory, Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing, Proceedings of the 9th International Conference (RSFDGrC 2003), LNAI 2639, pp. 44-51, 2003.
- [51] Yao Y. Y., Chen Y. H.: Rough Set approximations in formal concept analysis, Journal of Transactions on Rough Sets, V, LNCS 4100, 285-305.
- [52] Yu-Kyung Kang and Suk-Hyung Hawang: Rough concept analysis for rough classification Source, Proceedings of the 10th WSEAS international conference on Mathematical methods, computational techniques and intelligent systems, Greece, 2008, 137-142

Jelölések jegyzéke

(G, M, I) formális kontextus

$\mathcal{L}(G, M, I)$ a (G, M, I) a kontextushoz tartozó fogalomháló

L háló

$\mathfrak{B}(L)$ az L háléhoz tartozó dobozháló

A' az A halmaz objektumainak közös tulajdonságaiból álló halmaz

B' a B azon objektumok halmaza, amelyek minden attribútummal rendelkeznek

$\text{Ext}(G, M, I)$ a (G, M, I) kontextusból származó extenziók halmaza (hálója)

$\text{Int}(G, M, I)$ a (G, M, I) kontextusból származó intenziók halmaza (hálója)

$(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz

0_P vagy 0 a $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme

1_P vagy 1 a $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz legnagyobb eleme

π extenzió-partíció

$\pi_{\square}$ az objektumhalmaz legfinomabb extenzió-partíciója

$z^{\square\square}$ a legfinomabb extenzió-partíció amely tartalmazza z -t

$A(P)$ a $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz atomjainak összessége

$\mathcal{B}(G, M, I)$ a doboz-extenziók hálója

X^{∇} az X halmaz alsó approximációja

$X^{\blacktriangle}$ az X halmaz felső approximációja

X^{∇} az X halmaz alsó approximációja az inverz relációra nézve

$X^{\triangle}$ az X halmaz felső approximációja az inverz relációra nézve

X^c az X halmaz komplementere

$\mathcal{A}(X^{\nabla}, X^{\blacktriangle})$ durva halmaz

RS a durva halmazok összessége

$\mathcal{RS} = (RS, \leq)$ a durva halmazok részbenrendezett halmaza (hálója)

Az algoritmusok pszeudokódjainak leírásában alkalmazott további jelölések:

A, B, DS mátrix

j, l változó

$g[l]$ vektor

$a \longleftarrow 1$ értékadás