

MISKOLCI EGYETEM



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

ALGORITMUSOK VÉLETLEN PARAMÉTEREI
ÉS
PROGRAMOK VÉLETLEN TESZTELÉSE

PhD értekezés

Készítette:

Dr. univ. Nagy Ferenc
okleveles matematikus

HATVANY JÓZSEF INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

DOKTORI ISKOLA VEZETŐ

Prof. Dr. Tóth Tibor
A MŰSZAKI TUDOMÁNY DOKTORA

TUDOMÁNYOS VEZETŐ

Dr. habil. Galántai Aurél
AZ MTA DOKTORA

Miskolc, 2011

Feleségem emlékének ...

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	4
2. Algoritmusok és programok	7
3. Programhelyesség	10
4. Algoritmusok randomizálása	12
5. A hatvány módszer vizsgálata	20
1. Néhány fogalom összefoglalása	20
2. A probléma elemzése	23
3. Valószínűségek és becsléseik	25
4. Szimulációs eredmények	36
5. Az $F_{n,k}^{(m)}(x)$ eloszlásfüggvény lokális viselkedéséről	40
6. Korrelációs kapcsolatok	42
7. Statisztikai számítások	56
6. Eredmények	61
7. Summary	62
Függelék	
Valószínűség-számítási és statisztikai fogalmak, tételek	64
Irodalomjegyzék	68

Mellékletek

1. Bevezetés

A jelen értekezés a programtesztelés egy speciális témakörével foglalkozik, amikor is egy algoritmus számítógépen realizált programjának a helyességével kapcsolatban kell valamilyen módon állást foglalnunk. Előrebocsátjuk, hogy abszolút biztos döntési módszert nem adunk ebben az értekezésben egy ilyen kérdés eldöntésére. Figyelmünk arra irányul, hogy olyan statisztikai alapú tesztelési elvet alakítsunk ki, amelynek révén, ha a helyességet nem is, de legalább a nem helyesség erős gyanúját elérjük, ha a program valóban nem helyes. Az általunk követett módszer nem automatikus, inkább egy elv realizálását jelenti, általánosan nem „tömegesíthető”, de számos esetben figyelemre méltó eredményt is adhat.

Az értekezés megírásakor nem elhanyagolható szempont volt az anyagnak az oktatási folyamatba történő esetleges beillesztésének az igénye. Támaszkodtunk tehát a meglévő tantárgyi struktúrákra és igyekeztünk minél elemibb megoldásokat, bizonyításokat kidolgozni. A dolgozatban először a teljesség igénye nélkül röviden összefoglaljuk azokat a fogalmakat, amelyekre támaszkodunk, vagy amelyek kijelölik a környezetet, amelyben dolgozunk. A lineáris algebrai és a statisztikai legalapvetőbb fogalmakat ismertnek tételezzük föl, de a statisztikaiak egy részét a formulákra való nehézkes visszaemlékezhetőség miatt a függelékben helyeztük el. Célunk figyelembevételével hat fejezetre osztottuk a témánkat. A bevezetést követően a második, harmadik és negyedik rövid fejezetben összefoglaljuk az algoritmusokkal és a programokkal kapcsolatos alapvető ismereteket, kijelöljük a követendő szemléletmódot. Megvilágítjuk a programhelyesség és annak eldöntése, ellenőrzése fogalmát, valamint az ezzel járó nehézségekről is szólnak pár szót. Megadjuk az algoritmus randomizálásának egy módszerét, és annak felhasználhatóságát. Konkrét alkalmazásra példaként az ötödik fejezet szolgál, amelyben a kiválasztott algoritmus a *hatvány módszer*, amelyet a lineáris algebraban tárgyalt részleges sajátérték, sajátvektor meghatározási probléma egyik lehetséges megoldási algoritmusaként ismerünk. A választás azért esett erre az algoritmusra, mivel ahhoz egyszerű, hogy ne lehetetlenüljön el a tárgyalás, viszont nem annyira egyszerű, hogy trivialisokat kelljen mondanunk. Vannak a hatvány módszernél

jobb módszerek is ezen sajátérték, sajátvektor probléma megoldására, de a dimenziószám drasztikus növekedése esetén ezen versenytársak egyre több nehézséggel küzdenek. Jellemző példaként említjük meg, hogy a Google internetes kereső szoftver a talált honlapok rangsorolására (a találatok fontossági sorrend szerinti felsorolására) 2004 óta a hatvány módszert használja irányadó elvként. A probléma méretét a figyelt honlapok száma szabja meg, amely jelenleg körülbelül 4,3 milliárd. Ezeken a honlapokon a linkek számának figyelembe vételével végez a Google egy Markov láncnak megfelelő véletlen bolyongást, ezzel modellezve a honlapokon „szörföző” viselkedését. Az eredményként kapott valószínűségi vektor elemei adják az egyes rangokat, ugyanis azok a hosszú „szörfözés” utáni honlapra jutás valószínűségei lesznek, és ezek a Markov lánc mátrixának a legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektorát alkotják. A mátrix egyébként egy erősen ritka mátrix, sztochasztikus mátrix, amelynek a legnagyobb sajátértéke éppen egy. A hatvány módszer tehát újra az érdeklődés középpontjába került. A hatvány módszerrel a célunk nem az volt, hogy megjavítsuk, hiszen számos javított változata régóta ismert [28,32,41,47,51,...]. A fő feladatunk az algoritmus statisztikai tulajdonságainak a tanulmányozása, amelyekből azután egyeseket felhasználhatunk, vagy kapcsolatba hozhatunk a programhelyességgel. Mi éppen információelméleti statisztikákat javasolunk és mutatunk be mindamellett, hogy az algoritmus elemzése közben néhány összefüggésre is rámutatunk. Az értekezés utolsó fejezetében, a hatodik fejezetben foglaljuk össze a kapott eredményeket. Az eredmények elérésére és a kapott összefüggések szemléltetésére MATLAB környezetet feltételező számítógépes programot készítettünk, amelynek forrásnyelvi listáját az értekezéshez csatolt mellékekben találhatjuk meg.

Ami a fejezetek számozását illeti, az arab számokkal történik 1-gyel kezdődően növekedő sorrendben. A fejezetek alfejezetei szintén arab számokkal, eggyel kezdődően indulnak és a fejezet számához egy ponttal fűződnek hozzá. A formulák és a tételek számozása minden fejezetben és alfejezetben egytől kezdődően előlről indul. Ha egy hivatkozott formula az éppen aktuális fejezetben vagy alfejezetben található, akkor csak a tétel vagy formula ottani számát adjuk meg. Ha a hivatkozott

tétel vagy formula másik fejezetben vagy alfejezetben van, akkor a száma elé ponttal hozzáfűzve feltüntetjük a fejezet vagy alfejezet számát is.

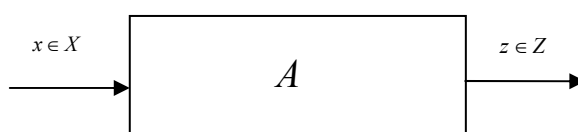
Köszönetnyilvánítás

Itt szeretném kifejezni köszönetemet Prof. Dr. habil. Galántai Aurélnak, témavezetőmnek, aki felhívta a figyelmemet a témára, és aki végig kitartóan segített. Ugyancsak köszönet illeti mindazokat, akik bíztak bennem és támogattak.

2. Algoritmusok és programok

Az algoritmusok probléma megoldási, feladat megoldási módszerek megfogalmazásai. Miután egy problémát, feladatot megfogalmaztunk, továbbá azt is megállapítottuk, hogy mit értünk a megoldásán, a megoldás elérésére rögzítünk valamilyen módszert. Létezzen a megoldás, különben nem kell megtalálni. Általában több módszer is létezhet a megoldás elérésére. A megoldás elérési módszerének a szabatos, lépésekbe foglalt megfogalmazását tekintjük majd algoritmusnak, amely általában absztrakt lehet és megadja azon tevékenységeket vagy műveleteket, amelyek révén a kiinduló helyzettől eljutunk a megoldásig. Lényeges a kivitelezhetőség, amelyen persze olyasvalamit értünk, hogy véges sok lépésből álljon, a lépések mindegyike véges idő alatt elvégezhető legyen, véges sok erőforrást kössön le, véges idő alatt fejeződjön be, minden lépés egyértelműen legyen megfogalmazva és egyértelmű legyen a lépések egymásutánisága is, ugyancsak egyértelmű legyen a kezdőlépés valamint a befejezés detektálhatósága, és a kapott végállapotból a megoldás kiolvashatósága. Nem célunk belemenni magának az algoritmus fogalmának az absztrakt fogalmakkal történő megközelítésébe, például a Turing gépes leírásba, mivel erre nem lesz szükségünk.

Az algoritmust úgy fogjuk fel, mint egy függvényt, amely valamely $x \in X$ elemhez (input adathoz) valamely $z \in Z$ elemet (output adatot) rendel hozzá. Egy $A : X \rightarrow Z$ leképezés. Természetesen x és z is lehet bonyolult felépítésű és nagyméretű. A probléma ennek a leképezésnek a megvalósításában, végrehajtásában áll valamely tetszőleges, de rögzített $x \in X$ esetében. Az X és Z halmazok az algoritmus (függvény) értelmezési tartománya és értékkészlete. Szemléletesebb talán a transzformáció fogalmán keresztül ezt leírni azzal, hogy az A algoritmus az x elemek X terét a z elemek Z terébe transzformálja át. Ebben a képben az x elemek az input, bemenet, a z elemek az output, kimenet szerepét játsszák. Ábrában



Az algoritmus tényleges fizikai lejegyzését nevezzük (nevezhetjük) *programnak*. Ez történhet szavakkal, grafikus folyamatábrával, struktogrammal, pszeudokóddal vagy valamely ismert programozási nyelv szintaxisa szerint. Tehát a program az absztrakt algoritmus realizálása. Ha még a realizációhoz találunk megfelelő hardvert is, akkor implementáltuk az algoritmust arra a hardverre. Megint csak érintetlenül hagyjuk az adott hardveren működő operációs rendszer jellegzetességeit. A hardver fizikai képességei korlátozhatják az algoritmus hatókörét, megváltoztathatják az input/output halmazokat. Általában szűkítik azokat, és bizonyos fokig az algoritmust is eltorzíthatják. Ezeket a kérdéseket szintén nem tárgyaljuk. A transzformáció leírása általában nem egyértelmű, ugyanazt a leképezést többféleképpen is részletezhetjük. Ilyenkor a két program *ekvivalenciájáról* beszélünk. Szép, konkrét példa erre Margulis [45] cikke, amelyben a nemnegatív mátrixok legnagyobb sajátértékének és a hozzá tartozó megfelelő sajátvektor meghatározására Fam van At által leírt Z1 algoritmusról bizonyítja be, hogy az nem más, mint a hatvány módszer egy esete.

Ha elkészítettük a programot, akkor utasítások, műveletek véges felsorolása áll előttünk. Ezek az utasítások, műveletek az adott programozási nyelv parancsai. Aprólékosságuk a nyelv fejlettségi szintjétől függ. A programot végrehajtása közben minden két, időben egymást közvetlenül követő utasítás között egy állapottal jellemezhetjük. Ez az állapot egy $s_i = (d_i, f_i)$ páros, amely azt mondja meg, hogy hogyan következik a d_i adat felhasználása az f_i függvény (parancs) által, amelynek eredménye egy újabb $s_{i+1} = f_i(d_i) = (d_{i+1}, f_{i+1})$ állapot lesz. A program tehát egy kezdő állapotból indulva állapotok sorozatán keresztül egy végállapot felé halad. Ha el is éri azt, akkor befejezte a munkáját, és akkor beszélhetünk a program eredményéről. Tulajdonképpen ilyenkor a program kilép a számára előírt állapotok teréből, és az operációs rendszer veszi át a vezérlést.

A program elkészítése a specifikáció alapján kell, hogy történjen. A specifikáció maga a leképezés, az input/output elemek egymáshoz rendelése. A program ennek a hozzárendelésnek a mikéntjét írja le, megad egy kiszámítási szabályt. Kérdés, hogy a program végül is valóban olyan kiszámítási szabályt ad-e meg, amely az eredeti

specifikációt valósítja meg, vagy nem. A kérdés finomítása, hogy egy adott hardveren, adott operációs rendszer mellett a válasz lehet igen, másik esetében pedig esetleg nem, tehát a specifikációnak ki kellene terjedni a hardver és a szoftver leírására is, de erre, mint említettük, nem térünk ki. Ezzel el is érkeztünk a programhelyesség problémaköréhez.

3. Programhelyesség

A program specifikációja tehát megadja a program lehetséges inputjainak az X halmazát, valamint az $x \in X$ inputhoz tartozó z outputtal az összetartozó (x, z) párokat. Ezt röviden úgy írhatjuk le, hogy megadandó az

$$\begin{aligned} &\{x \mid \varphi(x)\} \\ &\{(x, z) \mid \psi(x, z)\} \end{aligned}$$

úgynevezett *előfeltétel* és *utófeltétel* páros, ahol $\varphi(x)$ és $\psi(x, z)$ predikátumok. A páros megadja a helyes inputok halmazát és a helyes hozzárendeléseket. Azt mondjuk, hogy a P program végrehajtása az inputok $\varphi(x)$ specifikációja mellett *befejeződik*, ha a végrehajtás során az indítási pontból eljut a végállapothoz, a megállásig. *Parciálisan helyesnek* mondjuk a P programot, ha a $P(x)$ eredményre teljesül, hogy $\psi(x, P(x)) = igaz$ minden olyan x inputra, amelyre $\varphi(x) = igaz$, és a program befejeződik. *Teljesen helyesnek* mondjuk a P programot, ha minden olyan x inputra, amelyre $\varphi(x) = igaz$, a program befejeződik, és a $P(x)$ eredményre teljesül, hogy $\psi(x, P(x)) = igaz$. Tehát a P program helyességének a vizsgálatát az

$$\begin{aligned} &\{előfeltétel\} \\ &P \\ &\{utófeltétel\} \end{aligned}$$

séma felírásával kezdjük. A módszer érzékeny pontja maga a specifikáció. Nagy gonddal kell ugyanis eljárni a $\varphi(x)$ és $\psi(x, z)$ predikátumok felírásánál, hogy az helyes, valóban a problémát leíró és minden részletre kiterjedő, azaz teljes legyen. Például, ha egy A tömbben elhelyezkedő valós számok sorozatát akarjuk növekvő sorrendbe rendezni magában a tömbben, akkor elsőre elég természetesnek tűnik az alábbi séma.

$$\left\{ (n \in N) \wedge (n > 0) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n (a_i \in R) \right) \right\}$$

Rendez (A, n)

$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^{n-1} (a_i \leq a_{i+1}) \right\}.$$

Ha azonban a lusta, vagy gonoszkodó programozó a **Rendez** programot az alábbi módon készíti el, akkor teljesül az elő- és utófeltétel, vagyis a vizsgálat eredménye az, hogy a program helyes.

Rendez (A, n)

INPUT (n, a₁, ..., a_n)

FOR i ← 1 TO n DO

a_i ← a₁

OUTPUT (a₁, ..., a_n)

STOP.

A probléma nyilvánvalóan az, hogy nem kötöttük ki, hogy az A tömb elemeinek csak a sorrendje változhat, az összetétele nem.

Különböző módszerek léteznek a programhelyesség ellenőrzésének kivitelezésére. Például a Floyd, a Manna, vagy a Hoare módszer [53, 39, 25] (a felsorolás persze nem teljes), amelyek a program részekre bontása által logikai állítások közbeszúrása útján, azok igaz mivoltának belátásával jutunk el a végső helyes következtetésig. Ezek általában nem kevés munkát igényelnek. Nehéz összeállítani egy bonyolult, vagy „trükkös” programhoz a közbeszúrandó állításokat. Ebbe az irányba nem mélyedünk el.

4. Algoritmusok randomizálása

Az algoritmust, főként pedig a realizációját, a P programot továbbra is egy transzformációnak tekintjük, amely az $x \in X$ inputból a $z = P(x) \in Z$ outputot eredményezi a specifikációnak megfelelően helyes program esetén. A helyességről elvileg úgy is meggyőződhetnénk, hogy minden inputra a helyes output ismeretében ellenőriznénk a megfelelést. Ez azonban praktikusan kivitelezhetetlen, arról nem is beszélve, hogy ha meglenne az összes összetartozó (x, z) pár, akkor a programra sem lenne szükség, amely ezt a hozzárendelést valójában el is végzi, kiszámítja. Komoly alkut jelent e helyett a program tesztelése, ugyanis a tesztelés nem bizonyít, csak vagy megerősít a hitben, hogy a program helyes, vagy pedig egyértelműen megállapítja, hogy a program hibás. A tesztelés sem egyszerű feladat, hiszen össze kell állítani olyan teszt adatsorokat, amelyek minél több oldalról ellenőrzik a számítások helyességét. Ezen teszt adatsorokra valamilyen más forrásból előre ismerni kell a helyes outputokat. A teszt adatsorok számát a programgráf ciklikus bonyolultsága (a programgráfban a predikátumok száma + 1) alulról korlátozza [53], amely szám lehet igen nagy is, és még mindig nyitott kérdés a lehetőleg minden esetre kiterjedő megkonstruálásuk hogyanja. A mai processzorok nagy sebessége a teszt adatsorok nagy számának problémáját részint megoldja, legalábbis olyan szinten, hogy képes velük megbirkózni, a programot elviselhető idő alatt végrehajtani, végigszámolni. Gondoljunk csak a tesztek futtatásának párhuzamosíthatóságára. A másik gond, a konstruálási probléma. Ennek részleges elhárítására az input *randomizációja* javasolható. Az X input halmazból valószínűségi mértékteret alakítunk ki egy rajta bevezetett valószínűség eloszlás révén, vagy rajta értelmezett valószínűségi változó által. Az algoritmus, mint transzformáció hatása ezáltal egy valószínűségi változó transzformációja lesz, amely szintén egy valószínűség eloszlást indukál a Z output halmazon. Most bevezetünk néhány fogalmat.

Legyenek ξ, ξ_1 és ξ_2 valós véletlen változók rendre $f(x), f_1(x)$ és $f_2(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Jelölje $F(x), F_1(x)$ és $F_2(x)$ a megfelelő eloszlásfüggvényeiket.

Az alábbi három várható érték definiálja rendre az *entrópiát*, *inakkuranciát* (*pontatlanságot*) és a *diszkrimináló információt* (*I-divergenciát*, *Kullback eltérést*).

$$H(\xi) = \int_R \log \frac{1}{f(x)} dF(x), \quad (1)$$

$$T(\xi_1 \| \xi_2) = \int_R \log \frac{1}{f_2(x)} dF_1(x), \quad (2)$$

$$D(\xi_1 \| \xi_2) = \int_R \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dF_1(x), \quad (3)$$

ahol $R=(-\infty, \infty)$ és a $\log$ a természetes logaritmust jelenti. A fenti definíciók kiterjeszthetők az m -dimenziós esetre is. Lényeges tulajdonsága a diszkrimináló információnak, hogy nemnegatív, zérus is akkor és csak akkor lehet, ha a benne szereplő két sűrűségfüggvény majdnem mindenütt azonos [43], ahol a *majdnem mindenütt* kifejezés azt jelenti, hogy eltérés csak zérus mértékű halmazon lehetséges. Egyfajta irányított eltérési mérőszámot definiál két valószínűség eloszlás között. Általában $D(\xi_1 \| \xi_2) \neq D(\xi_2 \| \xi_1)$. Könnyen belátható, hogy

$$D(\xi_1 \| \xi_2) = T(\xi_1 \| \xi_2) - H(\xi_1). \quad (4)$$

A (4) formulából következik, hogy rögzített ξ_2 esetén a $T(\xi_1 \| \xi_2)$ minimuma akkor éretik el, ha $\xi_1 = \xi_2$ majdnem mindenütt, és ekkor $T(\xi_2 \| \xi_2) = H(\xi_2)$. A ξ_1, ξ_2 véletlen változókat a (2) és (3) formulában rendre *a posteriori* és *a priori* változóknak nevezzük.

Az algoritmus randomizálása során a véletlen inputból az algoritmus egy véletlen outputot eredményez. A még nem implementált algoritmus ismeretében a véletlen output eloszlása az input eloszlása alapján legalább elméletben meghatározható. Programhelyesség esetén ezt az eloszlást kapjuk az inputból. Ha az implementáció nem helyes, akkor esély van arra, hogy a véletlen output eloszlása eltér a helyes esetétől. Sajnos ezt nem lehet minden esetben biztosan garantálni. Például

szimmetrikus output eloszlás esetén az implementációban meglévő előjelhiba lehet, hogy nem okoz eltérést az output eloszlásában. (Ebben az esetben lehet olyan mintából kiindulni az input eloszlásának megválasztásával, hogy az output eloszlása ne legyen szimmetrikus.) Ha a várttól eltérő output eloszlást tapasztalunk, akkor azonban azt biztosan valamilyen implementálási hiba okozza, feltéve, hogy minden más változatlan. Vehetjük tehát az algoritmus kimentén megjelenő eloszlást a priorinak, és az implementációnál tapasztaltat a posteriorinak. Van egy kis probléma ez utóbbinak a meghatározásánál. Az a tény ugyanis, hogy az implementációt nem ismerjük, nem vagyunk benne biztosak, hogy az helyes-e, azt eredményezi, hogy nem tudjuk, hogy van-e benne hiba, és ha van, hol van, és hogy mi az pontosan. Ha tudnánk, akkor a hibakeresésnek nem lenne értelme. Ezért nagy számú véletlen inputot generálunk valamely eloszlásnak megfelelően, azaz egy statisztikai mintát készítünk, és ezen a mintán futtatjuk le az implementációt. Ezáltal megalkothatjuk az implementáció outputjának az empirikus eloszlását adott minta esetén. Az a posteriori eloszlást ezzel az empirikus eloszlással helyettesítjük. Jó lenne, ha ekkor kiszámítva a diszkrimináló információt, azt összevethetnénk a zérussal, legalább is nagy mintákra. Sajnos az elv nem működik, mivel nagy minta esetén az empirikus a posteriori eloszlásra az entrópia tag (4)-ben elfut a végtelen felé. Abban bízva, hogy nagy minta és helyes implementáció esetén az a posteriori mintaeloszlás konvergál az a priorihoz, az inakkuranciának konvergálnia kellene az a priori entrópiájához, ami viszont előre meghatározható. Ha viszont az implementáció nem helyes, akkor az a posteriori mintaeloszlás eltérhet az a prioritól, az a priorihoz történő konvergencia sem várható, így az inakkurancia eltér az a priori eloszlás entrópiájától.

Az inakkurancia ebben az esetben

$$T(\eta_k \| \xi_p) = \int_R \log \frac{1}{f_{\xi_p}(x)} dF_k(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \log \frac{1}{f_{\xi_p}(a_i)}. \quad (5)$$

Itt a_i jelöli a k elemű a posteriori minta i -dik elemét, η_k az implementáció által szolgáltatott output empirikus eloszlást, ξ_p pedig az a priori eloszlást.

($\xi_p = A(\xi)$, $\eta_k = P(\xi)$, ahol A az algoritmust, P az implementált programot szimbolizálja.). Azt kell statisztikailag eldönteni, hogy ez a szám szignifikánsan eltér-e az a priori eloszlás entrópiáját megadó számtól. Erre látunk majd példát az 5.7. alfejezetben.

A fejezet lezárása előtt egy rövid kitekintést adunk a fent vázolt információelméleti fogalmak hasznosságára, amint azt a [23] cikkben (és korábban a [12] egyetemi doktori értekezésemben) leírtam a statisztikai becslésmélet egy problémájának a megoldására, a Cauchy eloszlás paraméterbecslésére alkalmazva.

Jelentse a $\xi \sim C(c, s)$ azt, hogy a ξ véletlen változó Cauchy eloszlású c hely- és s skálaparaméterrel, ami azt jelenti, hogy a sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi \cdot s} \cdot \frac{1}{1 + [(x - c)/s]^2}. \quad (6)$$

A feladat az ismeretlen c és s paraméterek becslése megfigyelések, minta birtokában. A priori eloszlásnak tekintjük a feltételezett Cauchy eloszlást, a posteriorinak pedig a mintát, az empirikus mintaeloszlást. Ezek után azt a (c, s) paramétert fogadjuk el, amelyek esetén a diszkrimináló információ minimális, vagy ami ezzel ekvivalens, az inakkurancia minimális. Ehhez van ugyanis a legközelebb a megfigyelt minta legalábbis a diszkrimináló információ tekintetében. Ez az elv a paraméterbecslés szempontjából azonos becslést ad a maximum-likelihood becsléssel, amely igen kedvező statisztikai tulajdonságokkal rendelkezik. A Cauchy eloszlás esetén az inakkurancia alakja ($T(c, s)$ jelölje röviden az inakkuranciát):

$$T(c, s) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \left\{ \pi s \left[1 + ((a_i - c)/s)^2 \right] \right\}. \quad (7)$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket. A c, s paramétereket ismeretlennek, de fixnek feltételezzük, a mintaelemeket pedig a_i , $i = 1, \dots, n$ jelenti.

$$\begin{aligned}
 u_i &= (a_i - c)/s, & u_{ik} &= (a_i - c_k)/s_k, \quad i = 1, \dots, n \\
 e_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+u_i^2}, & e_{0k} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+u_{ik}^2} \\
 e_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{1+u_i^2}, & e_{1k} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{u_{ik}}{1+u_{ik}^2} \\
 e_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2}, & e_{2k} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{u_{ik}^2}{1+u_{ik}^2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

A téma áttekintése során a részletes bizonyításokat elhagyjuk, mivel a téma nem esik az értekezés fő vonalába. A bizonyítások megtalálhatók [12]-ben.

Lemma a Cauchy eloszlások közötti inakkuranciáról: Legyen $\xi_1 \sim C(c_1, s_1)$, $\xi_2 \sim C(c_2, s_2)$, akkor

$$T(\xi_1 \| \xi_2) = \log \frac{\pi[(s_1 + s_2)^2 + (c_1 - c_2)^2]}{s_2}. \tag{9}$$

Bizonyítása hosszadalmas integrálgatás. Mellőzzük.

Lemma a Cauchy inakkurancia minimumhely jellemzésére: A (7) szerinti $T(c, s)$ minimumhelyén teljesül, hogy:

$$c = c + s \cdot \frac{e_1}{e_0}, \quad s^2 = s^2 \cdot \frac{e_2}{e_0} = s^2 \cdot \left(\frac{1}{e_0} - 1 \right). \tag{10}$$

Bizonyítás: Standard módon a c és s szerinti parciális deriváltakat zérussal tesszük egyenlővé. ■

A lemma alapján a (10) egyenletrendszer megoldására az alábbi iterációs formulapár javasolható:

$$c_{k+1} = c_k + s_k \cdot \frac{e_{1k}}{e_{0k}}, \quad s_{k+1} = s_k \sqrt{\frac{1}{e_{0k}} - 1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{11}$$

ahol c_0 tetszőleges, s_0 pozitív valós szám.

Tétel a konvergenciáról: A (11) iterációs formulák szerinti számsorozatok nagy minta esetén a valódi paraméter értékekhez konvergálnak. A konvergencia sebessége geometriaiaként jellemezhető.

Bizonyítás (Vázlat): A nagy minta feltételezésére azért van szükség, hogy az e_{0k} és az e_{1k} helyettesíthető legyen a várható értékével a nagy számok törvénye értelmében. Legyen jelölésben $E(e_{0k}) = v_{0k}$, $E(e_{1k}) = v_{1k}$ és legyen $\xi \sim C(c, s)$, $\xi_k \sim C(c_k, s_k)$. Kiszámítható, hogy:

$$v_{0k} = \frac{s_k \cdot (s + s_k)}{(s + s_k)^2 + (c - c_k)^2}, \quad v_{1k} = \frac{s_k \cdot (c - c_k)}{(s + s_k)^2 + (c - c_k)^2}. \quad (12)$$

v_{0k} kiszámításához bevezetünk egy $\xi_{k,p} = \frac{1}{p} \cdot \xi_k + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot c_k \sim C(c_k, s_k / p)$

véletlen változót. Vegyük észre, hogy $v_{0k} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - p \frac{dT_p}{dp}\right) \Big|_{p=1}$, ahol

$$T_p \equiv T(\xi \| \xi_{k,p}) = \log \frac{\pi}{s_k} + \log p + \log \left[\left(s + \frac{s_k}{p}\right)^2 + (c - c_k)^2 \right]. \quad (13)$$

v_{1k} kiszámításához bevezetünk egy másik $\xi_{k,p} = \xi_k + (p-1) \cdot c_k \sim C(pc_k, s_k)$

véletlen változót. Vegyük észre, hogy $v_{1k} = -\frac{s_k}{2c_k} \cdot \frac{dT_p}{dp} \Big|_{p=1}$, ahol most

$$T_p \equiv T(\xi \| \xi_{k,p}) = \log(\pi / s_k) + \log[(s + s_k)^2 + (c - pc_k)^2]. \quad (14)$$

A (11) iterációs formulákban a nagy számok törvénye alapján elvégezve a helyettesítéseket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= c_k + s_k \cdot \frac{v_{1k}}{v_{0k}} = c_k + s_k \cdot \frac{c - c_k}{s + s_k} \\ s_{k+1}^2 &= s_k^2 \cdot \left(\frac{1}{v_{0k}} - 1 \right) = s_k \cdot \left[s + \frac{(c - c_k)^2}{s + s_k} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Azonnal látható, hogy ha $s_0 > 0$, akkor $s_k > 0$, $k=1,2,\dots$, továbbá, ha $s_k < s$,

akkor $s_{k+1} > s_k$, mivel $s_{k+1}^2 - s_k^2 = s_k \cdot (s - s_k) + s_k \cdot \frac{(c - c_k)^2}{s + s_k} > 0$, valamint ha $s_k > s$,

akkor $s_{k+1} > s$, mivel $s_{k+1}^2 - s^2 = s \cdot (s_k - s) + \frac{s_k}{s + s_k} \cdot (c - c_k)^2 \geq 0$. Összevonva:

$s_{k+1} \geq \min\{s_0, s\} > 0$. Most a c és s iteráltak sorozatainak konvergenciáját és annak

sebességét mutatjuk meg. Legyen $q \equiv \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{s}{s + s_0}\right\}$. Világos, hogy $\frac{1}{2} \leq q < 1$.

Érvényesek a következők:

$$|c - c_{k+1}| = \frac{s}{s + s_k} \cdot |c - c_k| \leq q \cdot |c - c_k| \leq \dots \leq q^{k+1} \cdot |c - c_0| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (16)$$

$$\begin{aligned} |s^2 - s_{k+1}^2| &= \left| \frac{s}{s + s_k} \cdot (s - s_k^2) + \frac{s_k}{s + s_k} \cdot (c - c_k)^2 \right| \leq \left| \frac{s}{s + s_k} \right| \cdot |s - s_k^2| + \left| \frac{s_k}{s + s_k} \right| \cdot (c - c_k)^2 \leq \\ &\leq q \cdot |s - s_k^2| + (c - c_k)^2 \leq q \cdot |s - s_k^2| + q^{2k} \cdot |c - c_0|^2 \leq \dots \\ &\leq q^{k+1} \cdot |s - s_0^2| + \frac{q^k \cdot (1 - q^{k+1})}{1 - q} \cdot |c - c_0|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (17)$$

■

Tétel a pontos megoldásról: Nagy minta esetén tetszőleges c_k -ra és $s_k > 0$ -ra fennáll:

$$\begin{aligned} c &= c_k + s_k \cdot \frac{v_{1k}}{v_{0k}^2 + v_{1k}^2} \\ s &= s_k \cdot \left(\frac{v_{0k}}{v_{0k}^2 + v_{1k}^2} - 1 \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Bizonyítás: A v_{0k} és v_{1k} -ra vonatkozó (12) formulából c és s egyszerűen kifejezhető, mint egy kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása. ■

A tétel révén röviden felírható a minimalizálandó inakkurancia értéke is:

$$T = \log \left(\pi \cdot \frac{(s + s_k)^2 + (c - c_k)^2}{s_k} \right) = \log \frac{\pi \cdot s_k}{v_{0k}^2 + v_{1k}^2}. \quad (19)$$

(18), (19)-ben v_{0k}, v_{1k} helyére e_{0k}, e_{1k} beírásával és (18) baloldalán a $k+1$ indexet felvéve iteratív formulát kapunk, amelynél igen gyors konvergenciát tapasztalunk.

Tétel a minimumhely egyértelműségéről: Nagy minta esetén a minimumhely egyértelmű.

Bizonyítás: (19)-nek az $s_k=s$ és $c_k=c$ -nél minimumhelye van, ami azáltal látható, hogy a négyzetre emelés miatt a $c_k=c$ esete nyilvánvaló, az $s_k=s$ pedig abból következik,

$$\text{hogy} \quad \frac{(s + s_k)^2}{s_k} = \left(\frac{s + s_k}{\sqrt{s_k}} \right)^2 = \left(\frac{s}{\sqrt{s_k}} + \sqrt{s_k} \right)^2 \geq \left(2 \sqrt{\frac{s}{\sqrt{s_k}}} \sqrt{\sqrt{s_k}} \right)^2 = 4s, \quad \text{ahol} \quad \text{az}$$

egyenlőtlenség az aritmetikai és a geometriai közepek közötti összefüggés által igaz, egyenlőséggel akkor és csak akkor, ha $\frac{s}{\sqrt{s_k}} = \sqrt{s_k}$, azaz ha $s_k=s$. A (19) inakkurancia

$T=t$ szintvonalai különböző t -re ($t \geq \log(4\pi s)$) egymásba ágyazott teljes körök a (c_k, s_k) koordináták által meghatározott felső félsíkban. Adott t -re a kör középpontja $[c, (1+2r)s]$, sugara $2s\sqrt{r(r+1)}$, ahol $r \geq 0$ olyan szám, hogy $e^t = 4\pi s(1+r)$. Ennek belátása elemi formula átalakítás. ■

5. A hatvány módszer vizsgálata

5.1. Néhány fogalom összefoglalása

Ebben a fejezetben vizsgáljuk a hatvány módszer tulajdonságait, amelyet a jelen vizsgálatban a valós, szimmetrikus, pozitív definit mátrixok legnagyobb sajátértékének és egy hozzátartozó sajátvektorának meghatározására használunk. Azt a gyakorlatban sokszor előforduló esetet elemezzük, amikor a módszert véletlen kiinduló vektorral indítjuk. A fejezetben alsó és felső becsléseket adunk az iteráció egyes lépéseiben a saját altértől való előírt nagyságúnál nem nagyobb eltéréssel kapcsolatos valószínűségekre.

Mi az $n \times n$ -es szimmetrikus, pozitív definit $\mathbf{A}$ mátrix esetével fogunk foglalkozni.

A *hatvány módszer* [47] az $\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb sajátértékét és egy hozzátartozó normált sajátvektor meghatározását célozza meg.

A hatvány módszer algoritmus:

1. Válasszunk egy tetszőleges $\mathbf{x}^{(0)} \neq \mathbf{0}$ vektort.
2. Képezzük az $\mathbf{y}^{(m+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)}$, $\mathbf{x}^{(m+1)} = \frac{1}{\|\mathbf{y}^{(m+1)}\|} \cdot \mathbf{y}^{(m+1)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ vektorokat.
3. Megállunk, ha az $\mathbf{x}$ vektorok már gyakorlatilag nem változnak.

A 3. pontban nem konkretizáljuk, hogy a „gyakorlatilag nem változnak” mit jelent, számos praktikus megállási feltétel ismeretes. Például megállunk, ha valamely kicsiny $\varepsilon > 0$ esetén a kettes, azaz az euklideszi normát használva fennáll, hogy

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(m)} - \rho^{(m)}\mathbf{x}^{(m)}\|_2}{\|\mathbf{x}^{(m)}\|_2} \leq \varepsilon, \quad \text{ahol} \quad \rho^{(m)} = \frac{\mathbf{x}^{(m-1)T} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(m-1)}}{\mathbf{x}^{(m-1)T} \mathbf{x}^{(m-1)}} \quad \text{az úgynevezett Rayleigh}$$

hányados [34]. A komplex sajátértékek itt nem vizsgált esetével kapcsolatban megjegyezzük, hogy akkor a kiindulásnál is komplex kezdővektorból kell kiindulni.

1. Tétel: *A hatvány módszer konvergenciájáról*

Ha $\mathbf{x}^{(0)}$ nem merőleges a λ_1 saját alterére és λ_1 domináns, azaz $|\lambda_1| > |\lambda_k|$, $k = 2, \dots, n$, akkor az eljárás során kapott $\mathbf{x}$ vektorok sorozata konvergál a legnagyobb sajátértékhez tartozó valamely normált sajátvektorhoz, az $\|\mathbf{y}\|$ vektornorma pedig a legnagyobb sajátértékhez.

Bizonyítás: lásd: [51]. Valószínűség-számítási megfogalmazásban az eljárás 1 valószínűséggel konvergál, ugyanis a saját altérre merőleges vektorok halmaza zérusmértékű. Adott kezdővektor esetére ismeretesek [32, 55] becslések a hibára és a konvergencia sebességére. Érdeemes megemlíteni a [48, 49] cikkeket, amelyek a hatvány módszer variánsaival foglalkoznak, differenciaegyenletek nemnegatív iterációi esetén állapítanak meg konvergenciát.

A mi célunk nem egy konkrét kezdőpont vizsgálata, hanem annak a megválaszolása, hogy ha találmra választunk egy kiinduló véletlen vektort, akkor egy megadott lépésszám megtétele után milyen valószínűséggel vagyunk a legnagyobb sajátérték alterének egy előírt szögműnyezetén belül.

Definíció: *Altér φ -szögműnyezete*

Egy vektort akkor mondunk egy *altér φ -szögműnyezetéhez tartozónak*, ha a vektor és az altér által bezárt szög kisebb, mint az előírt $\varphi > 0$ szám.

A célunk az lesz, hogy kiszámítsuk, vagy becslést adjunk arra, hogy m lépés megtétele után mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlen vektorral indított hatvány módszer a λ_1 alterével az előírt φ szögműnél kisebb szöget bezáró vektort szolgáltat. Bár a szög nem távolság, de egységnyi hosszúságú vektort tételezve föl a szög szinuszja már a valódi euklideszi távolságot eredményezi, továbbá kis szögműkre (radiánban mérve) a szög mérőszáma és a szinuszja aszimptotikusan ekvivalens, továbbá fennáll a $\sin x \leq x \leq \tan x$ összefűggés $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ esetén. Az itt megfogalmazott problémához hasonló, de bonyolultabb kezelésű esettel foglalkozik Del Corso [29] cikke, amely elindítója lett a jelen vizsgálódásnak. Megemlítendő

még Jessup cikke [40], amely azonban az inverz hatvány módszerrel foglalkozik más aspektusból.

A [29] cikk a [42]-re támaszkodik. A hatvány módszert az egységgömb felületén egyenletes eloszlású véletlen vektorral indítja. Az iterált vektor és a sajátvektor altere közötti euklideszi távolság éppen az iterált vektor és az altér által bezárt szög szinusza. Ha a szöget α -val jelöljük, akkor az alábbi módon bevezet egy $e_m^{ran}(A, p)$

randomizált hibának nevezett számértéket: $e_m^{ran}(A, p) = \left[\int_{S_n} |\sin \alpha_m(x)|^p \mu(dx) \right]^{1/p}$, ahol

S_n az egységgömb felszíne, μ a valószínűségi mérték, m az iterációs index, n a mátrix mérete, dimenziószám. és $(1 \leq p \leq \infty)$. Ez a randomizált hiba egyfajta várható értéke a távolságnak, pontosabban az euklideszi távolságnak, mint az S_n -nen értelmezett valószínűségi változónak az L_p normája. A szerző ennek a viselkedését vizsgálja erős analitikus eszközök bevetésével. Kimutatja, hogy ez a hiba mindenképpen függeni fog a sajátértékek eloszlásától, főként a legnagyobb és a második legnagyobb sajátérték hányadosától. A klasszikus numerikus irodalomban ez a tény az 50-es évek óta ismert analitikus megfontolások alapján. A cikk különböző formulákat mutat be esetszétválasztással a sajátérték multiplicitások, iterációs szám és p érték, dimenziószám függvényében a randomizált hiba alsó és felső korlátaira. Megmutatja, hogy nem érhető el éles becslés a sajátértékek hányadosától függetlenül. A következő fő eredményre jut: (az összehasonlíthatóság kedvéért a jelöléseket átírtuk a mi általunk használtakra)

1. Tétel: *Del Corso felső korlát tétele*

Legyen A szimmetrikus, pozitív definit mátrix. Jelölje k a legnagyobb sajátérték multiplicitását ($k < n$), és legyen $\mu_{k+1} = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1}$ a második

legnagyobb és a legnagyobb sajátérték hányadosa. Legyen

$$\beta = \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(p/2)\Gamma((n-p)/2)} \cdot \left(2 + \frac{2}{n}\right) \right]^{1/p} \mu_{k+1}^k. \text{ Akkor minden } p, (1 \leq p < \infty)$$

esetén és minden m iterációs lépésben fennáll, hogy

$$e_m^{ran}(A, p) \leq \begin{cases} \mu_{k+1}^m \left(\frac{\Gamma((k-p)/2) \Gamma((n+p-k)/2)}{\Gamma(k/2) \Gamma((n-k)/2)} \right)^{1/p}, & \text{ha } p < k \\ \mu_{k+1}^m (2m)^{1/p} \left(\ln \left(\frac{1}{\mu_{k+1}} \right) \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(p/2) \Gamma((n-p)/2)} \right)^{1/p} + \beta, & \text{ha } p = k \\ \mu_{k+1}^{mk/p} \left(\frac{\Gamma((p-k)/2) \Gamma(n/2)}{\Gamma(p/2) \Gamma((n-k)/2)} \right)^{1/p}, & \text{ha } p > k \end{cases}$$

Hasonló felépítésű alsó becslést ad a randomizált hibára azzal a kiegészítéssel, hogy a formulákban additív tagok jelennek meg, amelyekben fontos szerep jut a hipergeometrikus függvénynek, amely sok más speciális függvény kifejtésében szerepel. Nem érdemes idézni ezen terjedelmes formulákat. A cikk valójában arra a következtetésre jut, hogy az általa tárgyalt normára nem adható a mátrix spektrumától független éles becslés. Aszimptotikus formulákat is megfogalmaz a randomizált hibára és néhány sajátérték eloszlásra számítógépes futtatások eredményeit is bemutatja. Irányultságában eltér a jelen értekezésben tárgyalttól, de témakörében erősen emlékeztet rá. Valószínűségeket nem határoz meg. Az értekezés elkezdésekor ez volt szinte az egyetlen ilyen közel álló cikk.

5.2. A probléma elemzése

1. Tétel: *A szimmetrikus mátrix esete (Schur-Töplitz tétel [36])*

Ismeretes, hogy létezik olyan ortogonális $\mathbf{V}$ mátrix, melynek segítségével a $\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{D}$ transzformáció révén az $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ mátrixhoz jutunk. A $\mathbf{D}$ diagonális mátrix fődiagonálisán az $\mathbf{A}$ sajátértékei állnak, $\mathbf{V}$ oszlopai pedig rendre a megfelelő normált sajátvektorok.

Mivel $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ egységmátrix, ezért a transzformáció hasonlósági transzformáció, így a sajátértékek az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ esetén azonosak. Feltételezzük a továbbiakban, hogy a sajátértékek csökkenő sorrendben vannak rendezve a fődiagonálison. Ezek a sajátértékek egyúttal $\mathbf{D}$ -nek is sajátértékei. A $\mathbf{D}$ sajátvektorai a mesterséges bázis egységvektorai. A $\mathbf{D}$ mátrix sajátvektoraiból az $\mathbf{A}$ sajátvektorai $\mathbf{V}$ -vel történő

szorzással megkaphatók. A $\mathbf{V}$ -vel való szorzás, mint ortonormált transzformáció, az egész sajátvektorrendszert elforgatja, de a szögeket és a távolságokat megőrzi. A fenti esetben mindkét sajátvektorrendszer ortogonális. A $\mathbf{D}$ mátrix felépítése egyszerűbb, használata előnyösebb, ezért ezt fogjuk tanulmányozni. Egy tetszőleges vektornak a megszorzása a $\mathbf{D}$ mátrixszal a vektor koordinátáinak a megszorzását jelenti rendre a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokkal. A λ_i -hez tartozó sajátvektor az $\mathbf{e}_i$ úgynevezett i . egységvektor lesz.

Végezzük el a hatvány módszer egy iterációs lépését a $\mathbf{D}$ mátrixszal. A normalizálást elhagyjuk, mert minket most a szögek érdekelnek és a normalizálás a szögeket nem érinti. Legyen $\mathbf{x}^{(0)}$ a kiinduló vektor, és $\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{D}^m \mathbf{x}^{(0)}$ adja az iterált vektort. Az $\mathbf{x}^{(0)}$ vektor koordinátái $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. A $\mathbf{D}^m \mathbf{x}^{(0)}$ transzformáció után $\mathbf{x}^{(m)}$ koordinátái $(\lambda_1^m x_1^{(0)}, \lambda_2^m x_2^{(0)}, \dots, \lambda_n^m x_n^{(0)})$. Az $\mathbf{x}^{(0)}$ vektornak a legnagyobb sajátértékhez tartozó saját altérrel bezárt szöge legyen $\alpha^{(0)}$. Ennek a szögnek a tangense ha λ_1 egyszeres sajátérték, akkor

$$\tan(\alpha^{(0)}) = \frac{\sqrt{x_2^{(0)2} + x_3^{(0)2} + \dots + x_n^{(0)2}}}{|x_1^{(0)}|}. \quad (1)$$

A transzformáció m lépése után a szög legyen $\alpha^{(m)}$. Tangense ekkor:

$$\tan(\alpha^{(m)}) = \frac{\sqrt{\lambda_2^{2m} x_2^{(0)2} + \lambda_3^{2m} x_3^{(0)2} + \dots + \lambda_n^{2m} x_n^{(0)2}}}{\lambda_1^m |x_1^{(0)}|}. \quad (2)$$

Vezessük be a $\mu_i = \lambda_i / \lambda_1$, $i = 1, \dots, n$ jelölést. A transzformáció m lépése után a szög $\alpha^{(m)}$ lesz és tangense a λ_1 -gyel történő egyszerűsítés után:

$$\tan(\alpha^{(m)}) = \frac{\sqrt{\mu_2^{2m} x_2^{(0)2} + \mu_3^{2m} x_3^{(0)2} + \dots + \mu_n^{2m} x_n^{(0)2}}}{|x_1^{(0)}|}. \quad (3)$$

Ha a legnagyobb sajátérték multiplicitása k , akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ és a saját altér az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ vektorokra kifeszített altér lesz. Az $\mathbf{x}^{(0)}$ vektor az ezen saját altérrel bezárt $\alpha^{(0)}$ szögének tangense ekkor:

$$\tan(\alpha^{(0)}) = \frac{\sqrt{x_{k+1}^{(0)2} + x_{k+2}^{(0)2} + \dots + x_n^{(0)2}}}{\sqrt{x_1^{(0)2} + x_2^{(0)2} + \dots + x_k^{(0)2}}}. \quad (4)$$

A transzformáció m lépése után az $\alpha^{(m)}$ szög tangense:

$$\tan(\alpha^{(m)}) = \frac{\sqrt{\mu_{k+1}^{2m} x_{k+1}^{(0)2} + \mu_{k+2}^{2m} x_{k+2}^{(0)2} + \dots + \mu_n^{2m} x_n^{(0)2}}}{\sqrt{x_1^{(0)2} + x_2^{(0)2} + \dots + x_k^{(0)2}}}. \quad (5)$$

A tangens függvény használata azért célszerű, mert egészen kis szögek esetén gyakorlatilag megegyezik a szögeértékkel, pontosabban kissé nagyobb csak, másrészt felülről korlátozza a szög szinuszt, amely az euklideszi távolság értéke. Tehát, ha a tangens kicsi, akkor a szinusz annál inkább az. A másik előny a valószínűségek becslésénél adódik, mert a tangens esetén a későbbiekben a függetlenséget ki tudjuk használni, ami a szinusz esetén nem lehetséges. Ezen túlmenően, ha ismert egy valószínűségi becslés a tangensre, akkor abból az arkusz tangens függvény alkalmazásával már a szög valószínűségére is adható becslés egy transzformációval.

5.3. Valószínűségek és becsléseik

A szoftverek és programozási nyelvek általában biztosítják, hogy standard normális eloszlású (pszeudó-)véletlen számot elő tudjunk állítani.

Generáljunk n -dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektorokat a hatvány módszer számára az iteráció kiinduló vektoraként. Ha ezeket leosztjuk a vektorhosszakkal, akkor az n -dimenziós gömb felületén egyenletes eloszlású véletlen

vektorokat kapunk [30], ami a találmra választott kezdővektor választást valósítja meg.

Látható, hogy $\tan(\alpha^{(0)})$ eloszlása – mivel véletlen változó – az $(n-k, k)$ szabadságfokú F eloszlásból vont négyzetgyök eloszlása lesz. Ennek sűrűségfüggvénye az F eloszlás sűrűségfüggvényéből szinte azonnal adódik:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n-k-1}}{(1+x^2)^{n/2}}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (7)$$

Speciálisan kétdimenziós esetben ($n=2, k=1$) a (7) formula a Cauchy eloszlású véletlen változó abszolút értéke eloszlásának a sűrűségfüggvényét adja, n -dimenzióban pedig $k=1$ esetén, a t -eloszlás abszolút értékének reciproka adódik (konstans szorzó pontossággal).

Vezessük be az

$$F_{n,k}^{(m)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tan(\alpha^{(m)}) < x) \quad (8)$$

jelölést. Válasszuk meg az ε értékét úgy, hogy $\tan(\varphi) = \varepsilon$ teljesüljön. Akkor az $F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) = P(\alpha^{(m)} < \varphi)$ is érvényes. $F_{n,k}^{(0)}(\varepsilon)$ kiszámítható (7)-ből integrálással a 0 és az ε határok között. Ha $m > 0$, akkor az alábbi becslés írható fel (5.2.5) alapján figyelembe véve a sajátértékek csökkenő sorrendjét:

$$\tan(\alpha^{(m)}) \leq \mu_{k+1}^m \tan(\alpha^{(0)}) \quad (9)$$

Ennek alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) &= P(\tan(\alpha^{(m)}) < \varepsilon) \geq P(\mu_{k+1}^m \cdot \tan(\alpha^{(0)}) < \varepsilon) = \\ &= P\left(\tan(\alpha^{(0)}) < \frac{\varepsilon}{\mu_{k+1}^m}\right) = F_{n,k}^{(0)}\left(\frac{\varepsilon}{\mu_{k+1}^m}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

A (10) formula alsó becslést ad $F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon)$ -ra.

Felső becslést azáltal adhatunk, hogy (5.2.5) számlálójára alkalmazzuk a négyzetes közép és az aritmetikai közép között érvényes egyenlőtlenséget:

1. Tétel: *A négyzetes közép és az aritmetikai közép közötti egyenlőtlenség*

Tetszőleges valós $a_1 = \dots = a_n$ számokra fennáll a

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right| \quad (11)$$

egyenlőtlenség, egyenlőséggel akkor és csak akkor, ha

$$a_1 = \dots = a_n$$

Bizonyítás: A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget alkalmazzuk az

$(a_1, \dots, a_n)$ és $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ vektorokra. ■

Némi algebrai átalakítással (5.2.5) a (11) egyenlőtlenség alkalmazásával az alábbi alakra hozható:

$$\tan(\alpha^{(m)}) \geq c_{n,k}^{(m)} \cdot |t_k|, \quad (12)$$

ahol

$$c_{n,k}^{(m)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n-k} \mu_{k+j}^{2m}}{k \cdot (n-k)}} \quad (13)$$

és

$$t_k = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} \mu_{k+j}^m x_{k+j}^{(0)} / \sqrt{\sum_{j=1}^{n-k} \mu_{k+j}^{2m}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^{(0)^2} / k}}. \quad (14)$$

A (9) formulabeli t_k eloszlása k -szabadságfokú t -eloszlás. Ennek alapján az altérrel a megadott ε -nál kisebb tangensű szög bezárásának a valószínűsége az m -edik lépésben:

$$F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq F_{|t_k|}(\varepsilon / c_{n,k}^{(m)}) \quad , \quad (15)$$

ahol

$$F_{|t_k|}(x) = 2 \cdot \int_0^x \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{u^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} du. \quad (16)$$

Összefoglalva az adódott egyenlőtlenségeket kapjuk az alábbi, sajátunk tekinthető eredményt.

2. Tétel: *Alsó és felső valószínűségi becslés*

Annak a valószínűsége, hogy a szög tangense az m -dik lépésben már ε alatt marad:

$$F_{n,k}^{(0)}(\varepsilon / \mu_{k+1}^m) \leq F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq F_{|t_k|}(\varepsilon / c_{n,k}^{(m)}). \quad (17)$$

A gyakorlatban ε egy kis pozitív szám (mondjuk 0,001), például 1°-os szög esetén $\varepsilon = \tan(\pi/180) = 0,01745\dots$. Az (5.2.5) formula és a (17) formula vizsgálata alapján kimondható az alábbi tétel is, ami saját eredménynek tekinthető:

3. Tétel: *A becslés élességének jellemzése*

Ha csak kétféle sajátérték van, azaz $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n$ is fennáll, akkor a (17) formulában mindkét egyenlőtlenség helyén egyenlőség van.

Ekkor tehát pontos valószínűségeket tudunk adni, egyébként pedig kétoldali becsléseket. A (17) formula módot ad arra is, hogy mint mellék eredményt a hatvány módszer sztochasztikus konvergenciáját belássuk, ami saját eredményként csak a bizonyítás elemi mivolta miatt tekinthető, maga a tény már korábban is ismert volt.

4. Tétel: *A hatvány módszer sztochasztikus konvergenciája*

A hatvány módszer által szolgáltatott vektorok sorozata standard normális eloszlású kezdővektor esetén sztochasztikusan konvergál a legnagyobb sajátérték saját alterének valamely vektorához. Konvergencia esetén a sajátvektor rajta van a kezdővektornak a saját altérre vett merőleges vetületvektora hatásvonalán, továbbá a legnagyobb sajátérték előáll az iteráció során tapasztalt nyújtási tényezők mértani közepe limeszeként.

Bizonyítás: Mivel $\mu_{k+1} < 1$, ezért $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{k+1}^m = 0$. Következésképpen (17) baloldalán tetszőleges, pozitív, rögzített ε -ra $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon / \mu_{k+1}^m = \infty$, és így az eloszlásfüggvény tulajdonsága alapján $1 = \lim_{m \rightarrow \infty} F_{n,k}^{(0)}(\varepsilon / \mu_{k+1}^m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq 1$. Tehát $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) = 1$.

A tétel másik állításának bizonyítását adjuk meg alább. Legyen az iteráció kezdővektora $\mathbf{x}^{(0)}$, amely ne legyen merőleges λ_1 saját alterére. Az iterációs lépések:

$$\mathbf{y}^{(m+1)} = \mathbf{D}\mathbf{x}^{(m)}, \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \frac{1}{\|\mathbf{y}^{(m+1)}\|} \cdot \mathbf{y}^{(m+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{ahol a } \mathbf{D} \text{ a sajátértékeket}$$

csökkenő sorrendben tartalmazó diagonális mátrix, a norma pedig az euklideszi norma. Legyen az iteráció eredménye az $\mathbf{x}^*$ vektor és jelölje $\mathbf{x}_{\text{Pr}_1}^{(0)}$ a kezdővektor

merőleges vetületvektorát a λ_1 saját alterére. Legyen $c_m = \frac{\|\mathbf{y}^{(m)}\|}{\|\mathbf{x}^{(m-1)}\|}$, $m = 1, 2, \dots$ a

nyújtási tényező az m -dik lépésben. Nyilvánvalóan $c_m \leq \lambda_1$. Az iterációs összefüggést használva az alábbiak teljesülnek:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m)} &= \frac{\mathbf{y}^{(m)}}{\|\mathbf{y}^{(m)}\|} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{x}^{(m-1)}}{c_m \|\mathbf{x}^{(m-1)}\|} = \dots = \frac{\mathbf{D}^m \mathbf{x}^{(0)}}{c_1 \cdot \dots \cdot c_m \|\mathbf{x}^{(0)}\|}, \text{ és határátmenetet képezve} \\ \mathbf{x}^* &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^m \mathbf{x}^{(0)}}{c_1 \cdot \dots \cdot c_m \|\mathbf{x}^{(0)}\|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_1^m x_1^{(0)}, \dots, \lambda_1^m x_k^{(0)}, \lambda_{k+1}^m x_{k+1}^{(0)}, \dots, \lambda_n^m x_n^{(0)})}{c_1 \cdot \dots \cdot c_m \|\mathbf{x}^{(0)}\|} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^m (x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, \mu_{k+1}^m x_{k+1}^{(0)}, \dots, \mu_n^m x_n^{(0)})}{c_1 \cdot \dots \cdot c_m \|\mathbf{x}^{(0)}\|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^m}{c_1 \cdot \dots \cdot c_m} \cdot (x_1^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}, 0, \dots, 0) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^m}{c_1 \cdot \dots \cdot c_m} \cdot \frac{\mathbf{x}_{\text{Pr}_1}^{(0)}}{\|\mathbf{x}^{(0)}\|}. \end{aligned}$$

Vegyük a normát mindkét oldalon: $1 = \|\mathbf{x}^*\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1^m}{c_1 \cdot \dots \cdot c_m} \cdot \cos \alpha^{(0)}$, ahol $\alpha^{(0)}$ a

kezdővektornak az altérrel bezárt szöge. Gyökvonás után kapjuk, hogy

$$\lambda_1 \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\cos \alpha^{(0)}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{c_1 \cdot \dots \cdot c_m}, \text{ azaz } \lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{c_1 \cdot \dots \cdot c_m}. \quad \blacksquare$$

Alább megadjuk $n=2, 3, 4$ és 5 esetére az érdekes és nem triviális k ($k \neq n$) értékekre a konkrét kiintegrált formulákat, a sűrűségfüggvényekből kapható primitív függvényeket. Az integrálások a klasszikus integrálási technikákkal elvégezhetők.

$$n = 2$$

k	$\int f_{2,k}^{(0)}(x) dx$	$\int f_{ t_k }(x) dx$
1	$\int \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x)$	$\int \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x)$

$n = 3$

k	$\int f_{3,k}^{(0)}(x)dx$	$\int f_{ t_k }(x)dx$
1	$\int \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x)$
2	$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(2+x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$

$n = 4$

k	$\int f_{4,k}^{(0)}(x)dx$	$\int f_{ t_k }(x)dx$
1	$\int \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx =$ $= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2} \right)$	$\int \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x)$
2	$\int 2 \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(2+x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$
3	$\int \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} dx =$ $= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} \right)$	$\int \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{(3+x^2)^2} dx =$ $= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + \sqrt{3} \cdot \frac{x}{3+x^2} \right)$

$$n = 5$$

k	$\int f_{5,k}^{(0)}(x)dx$	$\int f_{ t_k }(x)dx$
1	$\int \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^5}} dx =$ $= -\frac{3x^2 + 2}{2 \cdot \sqrt{(1+x^2)^3}}$	$\int \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(x)$
2	$\int 3 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}} dx = \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$	$\int 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(2+x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$
3	$\int 3 \cdot \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^5}} dx = -\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$	$\int \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{(3+x^2)^2} dx =$ $= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right) + \sqrt{3} \cdot \frac{x}{3+x^2} \right)$
4	$\int \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^5}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot (2x^2 + 3)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$	$\int 24 \cdot \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^5}} dx = \frac{x \cdot (x^2 + 6)}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$

Ezután a (17) formulának megfelelően a behelyettesítéseket elvégezve az alábbi becslések adódnak, melyek közül a $k = n-1$ esetén pontos az érték, a többi pedig kétoldali becslés.

$$n = 2$$

k	$F_{2,k}^{(0)}(\varepsilon / \mu_{k+1}^m) \leq F_{2,k}^{(m)}(\varepsilon)$	$F_{2,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq F_{ t_k }(\varepsilon / c_{2,k}^{(m)})$
1	$\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varepsilon / \mu_2^m)$	$\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varepsilon / c_{2,1}^{(m)})$ ahol $c_{2,1}^{(m)} = \mu_2^m$

$n = 3$

k	$F_{3,k}^{(0)}(\varepsilon / \mu_{k+1}^m) \leq F_{3,k}^{(m)}(\varepsilon)$	$F_{3,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq F_{ t_k }(\varepsilon / c_{3,k}^{(m)})$
1	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon / \mu_2^m)^2}}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varepsilon / c_{3,1}^{(m)})$ ahol $c_{3,1}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_2^{2m} + \mu_3^{2m}}{2}}$
2	$\frac{\varepsilon / \mu_3^m}{\sqrt{1 + (\varepsilon / \mu_3^m)^2}}$	$\frac{\varepsilon / c_{3,2}^{(m)}}{\sqrt{2 + (\varepsilon / c_{3,2}^{(m)})^2}}$ ahol $c_{3,2}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_3^{2m}}{2}}$

$n = 4$

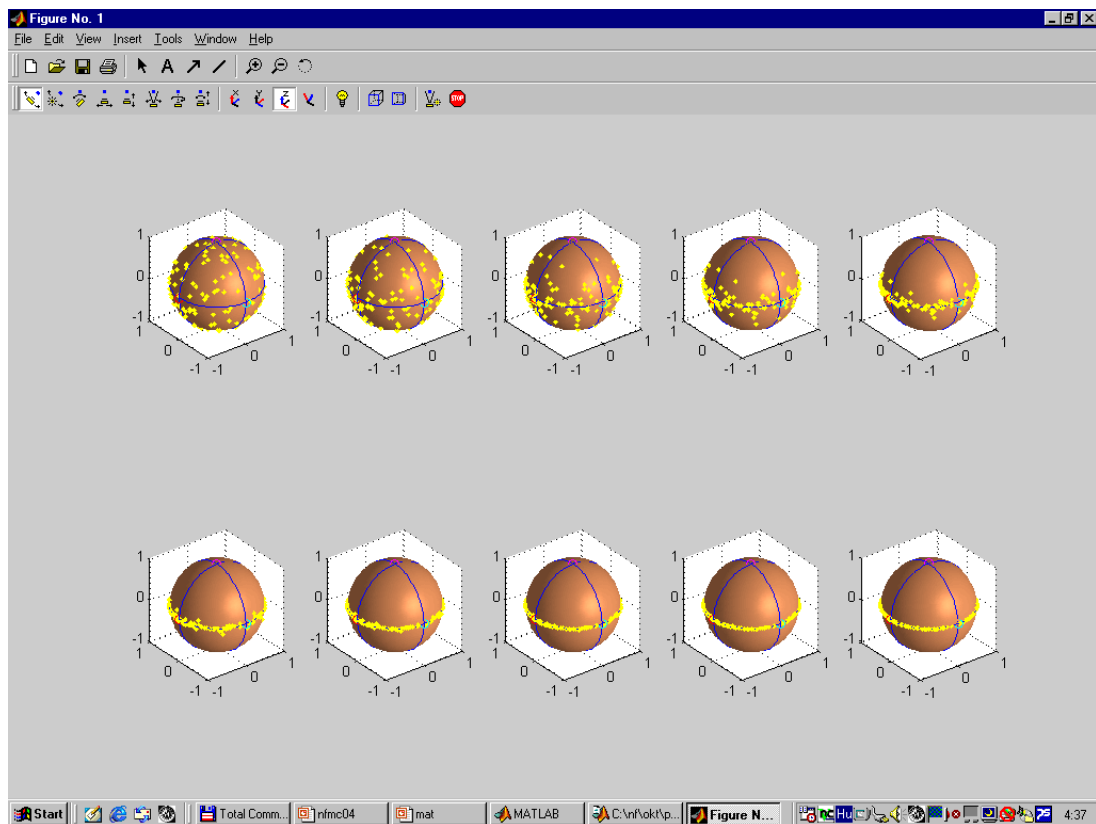
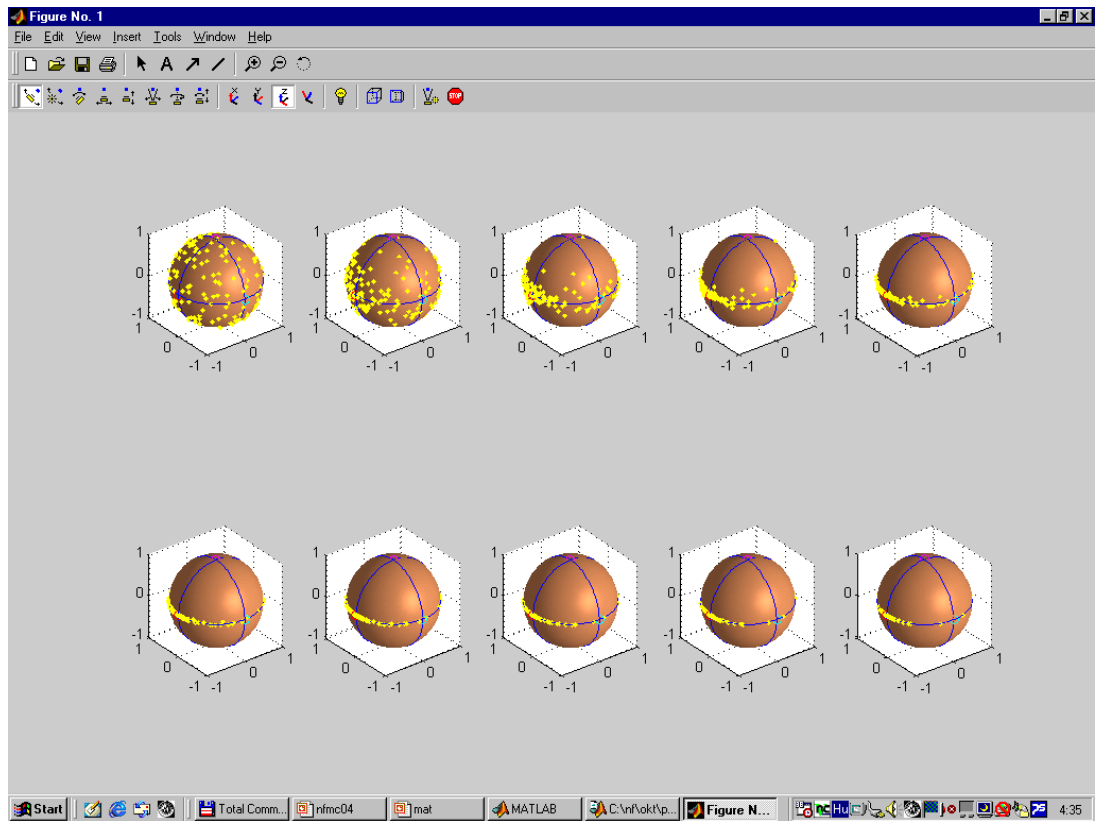
k	$F_{4,k}^{(0)}(\varepsilon / \mu_{k+1}^m) \leq F_{4,k}^{(m)}(\varepsilon)$	$F_{4,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq F_{ t_k }(\varepsilon / c_{4,k}^{(m)})$
1	$\frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan(\varepsilon / \mu_2^m) - \frac{\varepsilon / \mu_2^m}{1 + (\varepsilon / \mu_2^m)^2} \right)$	$\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varepsilon / c_{4,1}^{(m)})$ ahol $c_{4,1}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_2^{2m} + \mu_3^{2m} + \mu_4^{2m}}{3}}$
2	$\frac{(\varepsilon / \mu_3^m)^2}{1 + (\varepsilon / \mu_3^m)^2}$	$\frac{\varepsilon / c_{4,2}^{(m)}}{\sqrt{2 + (\varepsilon / c_{4,2}^{(m)})^2}}$ ahol $c_{4,2}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_3^{2m} + \mu_4^{2m}}{4}}$
3	$\frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan(\varepsilon / \mu_4^m) + \frac{\varepsilon / \mu_4^m}{1 + (\varepsilon / \mu_4^m)^2} \right)$	$\frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \varepsilon / c_{4,3}^{(m)}\right) + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \varepsilon / c_{4,3}^{(m)}}{3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \varepsilon / c_{4,3}^{(m)}\right)^2} \right)$ ahol $c_{4,3}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_4^{2m}}{4}}$

$$n = 5$$

k	$F_{5,k}^{(0)}(\varepsilon / \mu_{k+1}^m) \leq F_{5,k}^{(m)}(\varepsilon)$	$F_{5,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq F_{ t_k }^{(m)}(\varepsilon / c_{5,k}^{(m)})$
1	$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3(\varepsilon / \mu_2^m)^2 + 2}{\sqrt{(1 + (\varepsilon / \mu_2^m)^2)^3}}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \arctan(\varepsilon / c_{5,1}^{(m)})$ ahol $c_{5,1}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_2^{2m} + \mu_3^{2m} + \mu_4^{2m} + \mu_5^{2m}}{4}}$
2	$\frac{(\varepsilon / \mu_3^m)^3}{\sqrt{(1 + (\varepsilon / \mu_3^m)^2)^3}}$	$\frac{\varepsilon / c_{5,2}^{(m)}}{\sqrt{2 + (\varepsilon / c_{5,2}^{(m)})^2}}$ ahol $c_{5,2}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_3^{2m} + \mu_4^{2m} + \mu_5^{2m}}{6}}$
3	$1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + (\varepsilon / \mu_4^m)^2)^3}}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \varepsilon / c_{5,3}^{(m)}\right) + \frac{3\varepsilon / c_{5,3}^{(m)}}{3 + (\varepsilon / c_{5,3}^{(m)})^2} \right)$ ahol $c_{5,3}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_4^{2m} + \mu_5^{2m}}{6}}$
4	$\frac{\varepsilon / \mu_5^m}{2} \cdot \frac{2(\varepsilon / \mu_5^m)^2 + 3}{\sqrt{(1 + (\varepsilon / \mu_5^m)^2)^3}}$	$\frac{\varepsilon}{c_{5,4}^{(m)}} \cdot \frac{(\varepsilon / c_{5,4}^{(m)})^2 + 6}{\sqrt{(4 + (\varepsilon / c_{5,4}^{(m)})^2)^3}}$ ahol $c_{5,4}^{(m)} = \sqrt{\frac{\mu_5^{2m}}{4}}$

Sajnos általános zárt formulát nem sikerült adni ezen integrálok eredményére, egyszerűt valószínűleg nem is lehet, mivel a multiplicítások „elrontják a szabályokat”, lévén a saját alterek nem folytonosan változnak a mátrixelemek függvényében.

Az alfejezet befejezéseként következzen két ábra az iterációra három dimenzióban. Az első esetben a legnagyobb sajátvektor altere egydimenziós, a másik esetben kétdimenziós. Az egyes iterációs lépések során a véletlen vektorok felhőjének konvergenciáját követhetjük nyomon MATLAB-ot használva.



5.4. Szimulációs eredmények

Számítógépes szimulációval MATLAB környezetben végeztünk futtatásokat az (5.3.17) formula alátámasztására. Ezek közül bemutatunk három tipikusát. Az eredményeket az 1-es, 2-es, 3-as táblázatban, valamint az 1-es, 2-es és 3-as ábrákon foglaltuk össze. A MATLAB véletlenszám generátorát használva 10000 kiinduló vektorból teszteltük az (5.3.8) formulákat. A sajátértékeket $n=2$ -nél 4.5; 3, $n=3$ -nál 4.5; 3; 2, $n=4$ -nél 4.5; 3; 2; 1-nek választottuk. Mivel a konvergencia sebességét elsősorban a két legnagyobb sajátérték hányadosa befolyásolja, így közelítőleg teljesül az egyes esetek összehasonlíthatósága. Az ε értékét az 1° -os szögnek megfelelően választottuk meg. Kiszámítottuk 20 iterációs lépésre az (5.3.6) formula által adott értékeket, valamint meghatároztuk %-osan azon vektorok részarányát, amelyek az aktuális lépésszám után teljesítették az előírt pontosságot. Ezek grafikonjait is elkészítettük a valószínűségekre, a relatív gyakoriságokra, valamint a különbségükre (= becslés - szimuláció) a lépésszám függvényében. Az eredmények - figyelembe véve a nagy számok törvényét - alátámasztják az elméleti fejtegetéseket. Jól láthatóan az első esetben ($n=2$, $k=1$) a becslések és a szimuláció által szolgáltatott valószínűségek minden iterációs lépésben jól fedik egymást, míg a másik két esetben a becslések a szimuláció két oldalán találhatók, ahogy az elvárható volt. Természetesen nagyobb vektorszámra, valamint más (viszonylag alacsony) dimenziószám és multiplicitás értékekre is végeztünk szimulációt és az eredmények ott is hasonlóan jók voltak

1.táblázat
Szimulációs számeredmények ($n=2$, $k=1$ eset)

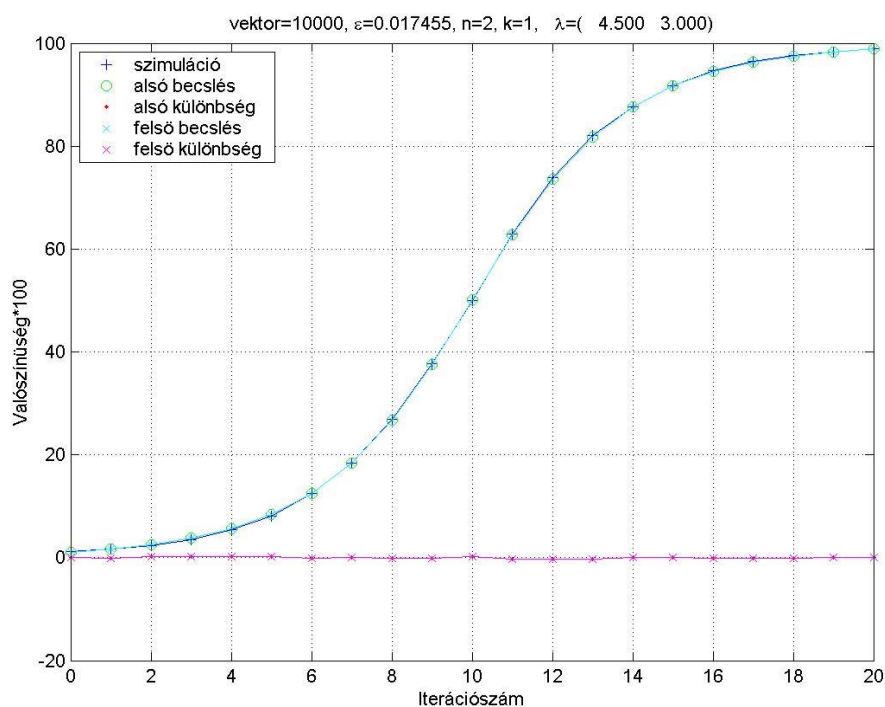
Iteráció	Alsó becslés	Szimuláció	Felső becslés	Különbség	
				Alsó	Felső
0	1.11	1.13	1.11	-0.02	-0.02
1	1.67	1.71	1.67	-0.04	-0.04
2	2.50	2.35	2.50	0.15	0.15
3	3.75	3.55	3.75	0.20	0.20
4	5.61	5.42	5.61	0.19	0.19
5	8.39	8.13	8.39	0.26	0.26
6	12.49	12.53	12.49	-0.04	-0.04
7	18.45	18.42	18.45	0.03	0.03
8	26.78	26.92	26.78	-0.14	-0.14
9	37.63	37.70	37.63	-0.07	-0.07
10	50.21	50.06	50.21	0.15	0.15
11	62.76	62.96	62.76	-0.20	-0.20
12	73.53	73.83	73.53	-0.30	-0.30
13	81.77	82.08	81.77	-0.31	-0.31
14	87.66	87.64	87.66	0.02	0.02
15	91.72	91.74	91.72	-0.02	-0.02
16	94.46	94.65	94.46	-0.19	-0.19
17	96.30	96.42	96.30	-0.12	-0.12
18	97.53	97.60	97.53	-0.07	-0.07
19	98.36	98.26	98.36	0.10	0.10
20	98.90	98.92	98.90	-0.02	-0.02

2.táblázat
Szimulációs számeredmények ($n=3$, $k=1$ eset)

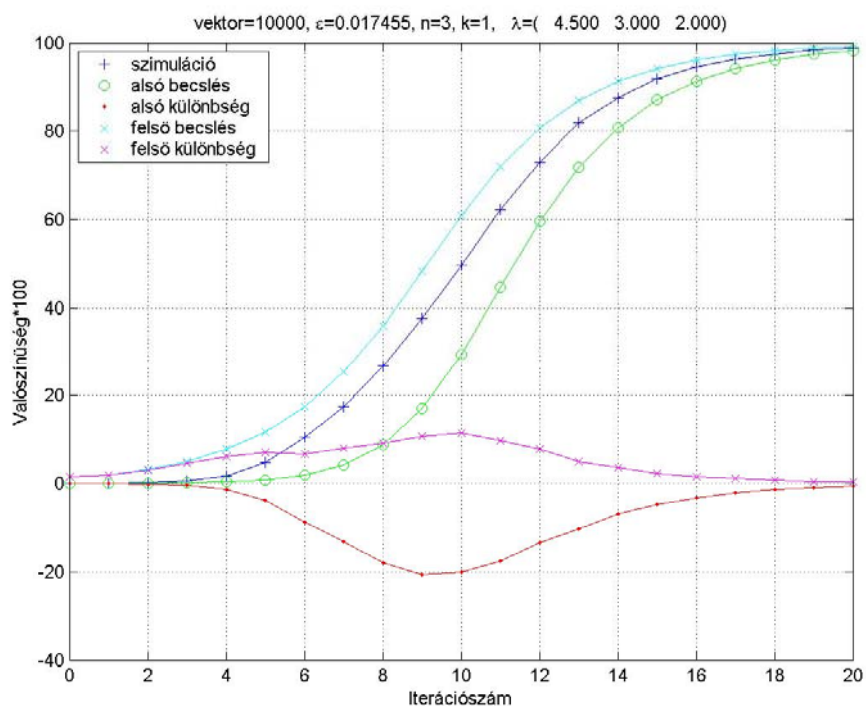
Iteráció	Alsó becslés	Szimuláció	Felső becslés	Különbség	
				Alsó	Felső
0	0.02	0.01	1.57	0.01	1.56
1	0.03	0.04	1.96	-0.01	1.92
2	0.08	0.17	3.23	-0.09	3.06
3	0.17	0.52	5.07	-0.35	4.55
4	0.39	1.73	7.77	-1.34	6.04
5	0.87	4.70	11.70	-3.83	7.00
6	1.92	10.60	17.39	-8.68	6.79
7	4.17	17.38	25.37	-13.21	7.99
8	8.72	26.75	35.89	-18.03	9.14
9	16.96	37.62	48.32	-20.66	10.70
10	29.52	49.59	61.01	-20.07	11.42
11	44.78	62.29	72.11	-17.51	9.82
12	59.61	72.97	80.73	-13.36	7.76
13	71.76	81.99	86.94	-10.23	4.95
14	80.74	87.56	91.22	-6.82	3.66
15	87.03	91.81	94.13	-4.78	2.32
16	91.31	94.54	96.08	-3.23	1.54
17	94.20	96.25	97.38	-2.05	1.13
18	96.13	97.42	98.26	-1.29	0.84
19	97.42	98.35	98.84	-0.93	0.49
20	98.28	98.84	99.22	-0.56	0.38

3.táblázat
Szimulációs számeredmények ($n=4$, $k=1$ eset)

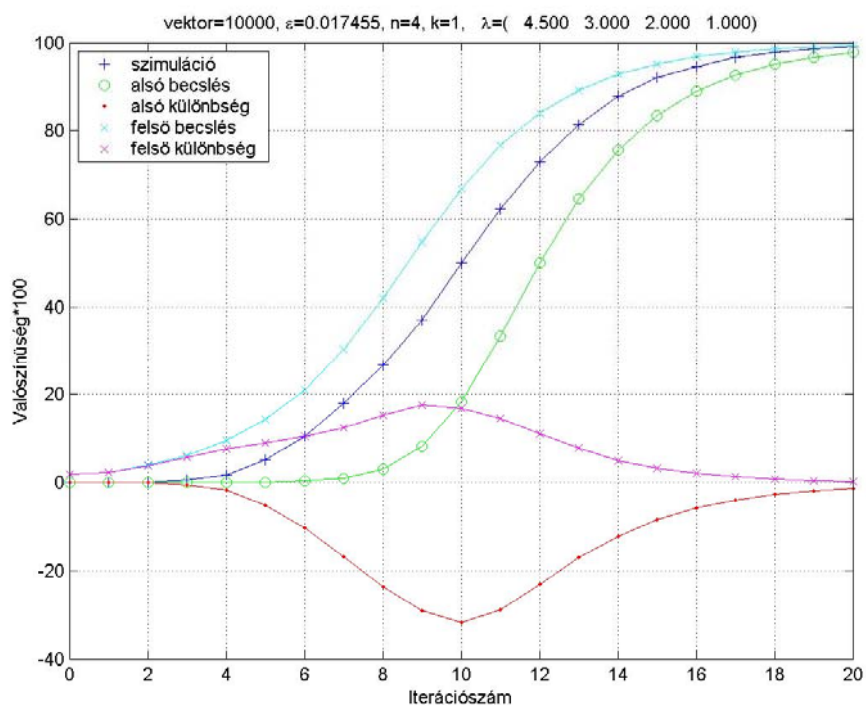
Iteráció	Alsó becslés	Szimuláció	Felső becslés	Különbség	
				Alsó	Felső
0	0.00	0.00	1.92	0.00	1.92
1	0.00	0.00	2.31	0.00	2.31
2	0.00	0.07	3.93	-0.07	3.86
3	0.01	0.50	6.20	-0.49	5.70
4	0.03	1.79	9.49	-1.76	7.70
5	0.10	5.25	14.25	-5.15	9.00
6	0.32	10.61	21.04	-10.29	10.43
7	1.02	17.90	30.31	-16.88	12.41
8	3.05	26.70	41.94	-23.65	15.24
9	8.17	37.15	54.76	-28.98	17.61
10	18.38	50.06	66.84	-31.68	16.78
11	33.45	62.28	76.75	-28.83	14.47
12	50.01	73.02	84.11	-23.01	11.09
13	64.53	81.42	89.28	-16.89	7.86
14	75.63	87.80	92.82	-12.17	5.02
15	83.53	91.98	95.20	-8.45	3.22
16	88.95	94.59	96.80	-5.64	2.21
17	92.61	96.57	97.86	-3.96	1.29
18	95.07	97.81	98.58	-2.74	0.77
19	96.71	98.57	99.05	-1.86	0.48
20	97.81	99.11	99.37	-1.30	0.26



1. ábra



2. ábra



3. ábra

5.5. Az $F_{n,k}^{(m)}(x)$ eloszlásfüggvény lokális viselkedéséről

Ebben az alfejezetben az (5.2.5) által leírt véletlen változó $F_{n,k}^{(m)}(x)$ eloszlásfüggvénye növekedésének jellemzését adjuk kicsiny argumentum értékek esetére. A következő eredményt sikerült igazolnom.

1. Tétel: Az $F_{n,k}^{(m)}(x)$ eloszlásfüggvény lokális tulajdonsága

$$\text{Kis } \varepsilon > 0 \text{ szögértékek esetén } F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{n-k}).$$

(Nagy ε esetén az állításnak nincs ereje, mivel az eloszlásfüggvény értéke egytől sohasem lehet nagyobb.)

Bizonyítás: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, standard normális eloszlású véletlen változók. Az egyszerűség kedvéért legyen kezdetben $k=1$. Tekintsük a $\xi_1, \mu_2 \xi_2, \dots, \mu_n \xi_n$ véletlen változókat. Ezek együttes eloszlása n -dimenziós normális eloszlás lesz zérusvektor várható értékkel és a kovariancia mátrix diagonális mátrix lesz. A diagonális mátrix alakja: $\text{diag}(1, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2)$. Ekkor a keresett valószínűség:

$$F_{n,1}^{(1)}(\varepsilon) = \int_{\frac{\mu_2^2 x_2^2 + \dots + \mu_n^2 x_n^2}{x_1^2} < \varepsilon^2} C_n \cdot \frac{1}{\mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{\mu_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{\mu_n^2} \right)} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (1)$$

C_n a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényében szereplő n -től (a dimenziószámtól) függő konstans. Az integrálási tartomány, ha az őt megadó egyenlőtlenségben ε^2 -tel is átosztunk, egy $n - 1$ dimenziós ellipszoid, melynek félnagy tengelyei rendre: $\frac{\varepsilon \cdot |x_1|}{\mu_2}, \dots, \frac{\varepsilon \cdot |x_1|}{\mu_n}$. A függetlenséget figyelembe véve és

alkalmazva a teljes valószínűség tételét a fenti integrál az alábbi alakban is írható:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2} x_1^2} \int_{\frac{\mu_2^2 x_2^2 + \dots + \mu_n^2 x_n^2}{x_1^2} < \varepsilon^2} C_{n-1} \cdot \frac{1}{\mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_2^2}{\mu_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{\mu_n^2} \right)} dx_2 \dots dx_n dx_1. \quad (2)$$

Ebben a formulában, a belső integrálban az exponenciális függvény értéke sohasem haladja meg az 1-et. A belső integrál ezáltal felülről egy konstanssal becsülhető. A konstans értéke a $C_{n-1} \cdot \frac{1}{\mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n}$ és az $n - 1$ dimenziós $\frac{\varepsilon \cdot |x_1|}{\mu_2}, \dots, \frac{\varepsilon \cdot |x_1|}{\mu_n}$ félnagy tengelyekkel rendelkező ellipszoid térfogatának szorzata, mely utóbbi $K_{n-1} \cdot \frac{\varepsilon^{n-1} |x_1|^{n-1}}{\mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n}$, ahol K_{n-1} dimenziófüggő konstans. Ezáltal az alábbi felső becslést írhatjuk fel:

$$F_{n,1}^{(1)}(\varepsilon) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} C_{n-1} K_{n-1} \cdot \frac{\varepsilon^{n-1} |x_1|^{n-1}}{\mu_2^2 \cdot \dots \cdot \mu_n^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} x_1^2} dx_1. \quad (3)$$

Legyen C a C_{n-1}, K_{n-1} és a standard normális eloszlás $n - 1$ -edrendű abszolút momentumának (ami n -függő konstans szám) a szorzata, mint végső konstans. Ekkor

$$F_{n,1}^{(1)}(\varepsilon) \leq C \cdot \frac{\varepsilon^{n-1}}{\mu_2^2 \cdot \dots \cdot \mu_n^2}. \quad (4)$$

Állításunk bizonyítását azzal az észrevétellel tesszük teljessé, hogy a fenti gondolatmenet végigvihető azzal a változtatással, hogy az $n - 1$ helyett mindenütt $n - k$ áll, az egydimenziós standard normális eloszlás helyett k dimenziós szerepel, és a $\mu_2, \dots, \mu_n$ paraméterek helyett $\mu_k^m, \dots, \mu_n^m$ írható. Ezzel a bizonyítást befejeztük. ■

Természetesen a tételben szereplő nagy ordó szimbólumhoz az egyes esetekben tartozó konstans rendkívüli módon változhat. Ugyan ε -tól nem függ, de n -tól (a probléma mérete), k -tól (a legnagyobb sajátérték multiplicitása), m -tól (az iterációs lépésszám) és ami nem elhanyagolható, a sajátértékektől viszont erősen függ.

5.6. Korrelációs kapcsolatok

A célunk ebben az alfejezetben az, hogy vizsgáljuk a korrelációs kapcsolat milyenségét a hatvány módszer iterációs lépései során a kapott iterált vektor koordinátái, mint véletlen változók között. Először a kétdimenziós esetet elemezzük. Ebben az esetben egészen elemi eszközökkel sikerül konvergenciát bizonyítani és bizonyos fokig a sebességre nézve is mondva valamit. A továbbiakban a többdimenziós esetet vizsgáljuk, ahol szintén bebizonyítunk egy speciális esetre konvergenciát, nevezetesen arra az esetre, amikor a legnagyobb sajátérték egyszeres algebrai multiplicitású és látni fogjuk, hogy miért nem figyelhető meg általában a konvergencia a többszörös multiplicitások esetén.

Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ normális eloszlású véletlen változó $(0, I)$ paraméterekkel, ahol 0 a várható értékek vektora, zérusvektor, I pedig a kovariancia mátrix, egységmátrix. Jelölésben ezt röviden úgy írjuk, hogy $\xi \sim N_2(0, I)$. Itt tulajdonképpen két, független, standard normális eloszlású véletlen változó közös, kétdimenziós eloszlásáról van szó. Legyen most A kvadratikus, szimmetrikus, nem szinguláris mátrix, és legyen $(\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)})^T = \boldsymbol{\eta}^{(1)} = A\xi$. Ismeretes (Függelék 3. Tétel), hogy akkor $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ normális eloszlású $(0, AA^T)$ paraméterekkel. Az A mátrix szimmetrikussága miatt most $AA^T = A^2$. Jelölje $S^{(1)}$ ezt az A^2 mátrixot. Ez a mátrix az $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ kovariancia mátrixa. (Ha az A mátrix nem szimmetrikus, a kovariancia mátrix akkor is szimmetrikus lesz, sőt nonszinguláris A -ra pozitív definit.)

Legyen $\boldsymbol{\eta}^{(2)} = A\boldsymbol{\eta}^{(1)}$, és általában $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)} = A^{(m)}\boldsymbol{\eta}^{(m)}$, $m=1,2,3,\dots$, ahol $A^{(m)} = A^{(m-1)}$ és $A^{(0)} = A$. Az így előálló $\{\boldsymbol{\eta}^{(m)}\}_{m=1,2,\dots}$ vektorsorozat véletlen vektorok sorozata lesz, melynek tagjai normális eloszlásúak, zérusvektor várható értékkel és $S^{(m)} = A^{2m}$, $m=1,2,3,\dots$ kovariancia mátrixszal. Az $S^{(m)}$ kovariancia mátrix mindig felírható az alábbi formában:

$$S^{(m)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(m)2} & r^{(m)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} \\ r^{(m)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} & \sigma_2^{(m)2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ahol $r^{(m)}$ a korrelációs együttható $\eta_1^{(m)}$, és $\eta_2^{(m)}$ között, valamint $\sigma_1^{(m)}$ és $\sigma_2^{(m)}$ rendre az $\eta_1^{(m)}$, és $\eta_2^{(m)}$ véletlen változók szórásai. A következő összefüggést sikerült igazolnom.

1. Tétel: *A koordináták korrelációjának konvergenciája*

A fenti feltételek és jelölések mellett

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r^{(m)} = \text{sign}(r^{(1)}). \quad (2)$$

A konvergencia sebessége lineáris.

Bizonyítás: Triviális az állítás az $r^{(1)} = 0$ esetben, hiszen a kovariancia mátrix ekkor diagonális, és így a hatványozás után is az marad, tehát a korrelációs együttható minden lépésben zérus.

Az $r^{(1)} \neq 0$ esetet csak a pozitív korrelációs együtthatóra ($r^{(1)} > 0$) bizonyítjuk, mivel negatív esetre analóg módon minden végigvihető. A bizonyítás elve az lesz, hogy megmutatjuk, hogy az r -ek sorozata monoton nő, és felülről korlátos. Ebből következni fog a limesz létezése. Ezután pedig megmutatjuk, hogy a limesz éppen 1-gyel egyenlő.

A korlátosság bizonyítása: Mivel r minden lépésben korreláció, ezért 1-gyel felülről korlátos.

A monotonitás bizonyítása: Megmutatjuk, hogy $r^{(m+1)} \geq r^{(m)}$ azáltal, hogy $r^{(m+1)} \geq c^{(m)} \cdot r^{(m)}$, ahol $c^{(m)} \geq 1$. Először megmutatjuk, hogy $r^{(2)} \geq r^{(1)}$. Ezután teljes indukcióval látjuk be a többi esetre. Az indukciós feltételezésünk az lesz, hogy $r^{(m)} \geq r^{(1)}$. Legyen tehát $r^{(1)} > 0$. Akkor $\mathbf{S}^{(2)} = \mathbf{S}^{(1)2}$. Elvégezve a négyzetre emelést, kapjuk, hogy

$$\mathbf{S}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(1)2}(\sigma_1^{(1)2} + r^{(1)2}\sigma_2^{(1)2}) & r^{(1)}(\sigma_1^{(1)2} + \sigma_2^{(1)2}) \\ r^{(1)}(\sigma_1^{(1)2} + \sigma_2^{(1)2}) & \sigma_2^{(1)2}(r^{(1)2}\sigma_1^{(1)2} + \sigma_2^{(1)2}) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Innen viszont

$$r^{(2)} = \frac{r^{(1)}(\sigma_1^{(1)2} + \sigma_2^{(1)2})}{\sqrt{\sigma_1^{(1)2}(\sigma_1^{(1)2} + r^{(1)2}\sigma_2^{(1)2})}\sqrt{\sigma_2^{(1)2}(r^{(1)2}\sigma_1^{(1)2} + \sigma_2^{(1)2})}}. \quad (4)$$

Ez röviden

$$r^{(2)} = r^{(1)} \cdot c, \quad (5)$$

ahol

$$c = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_1^2 + r^{(1)2}\sigma_2^2}\sqrt{r^{(1)2}\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} > 0. \quad (6)$$

Az, hogy $c \geq 1$ abból következik, hogy (6) nevezőjében mindegyik gyökjel alatt kisebb szám áll, mint a számláló, hiszen $r^{(1)}$ korrelációs együttható és így értéke nem több, mint 1. Egyenlőség esetén kapnánk a számlálót. Tehát c lehető legkisebb értéke 1, azaz $r^{(2)} \geq r^{(1)}$.

Vizsgáljuk meg most az $\mathbf{S}^{(m)}$ és az $\mathbf{S}^{(m+1)}$ mátrixokat. Fennáll az

$$\mathbf{S}^{(m+1)} = \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(m)} \quad (7)$$

összefüggés. Kirészletezzük (7) jobboldalát:

$$\mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{S}^{(m)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(1)2} & r^{(1)}\sigma_1^{(1)}\sigma_2^{(1)} \\ r^{(1)}\sigma_1^{(1)}\sigma_2^{(1)} & \sigma_2^{(1)2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^{(m)2} & r^{(m)}\sigma_1^{(m)}\sigma_2^{(m)} \\ r^{(m)}\sigma_1^{(m)}\sigma_2^{(m)} & \sigma_2^{(m)2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

A szorzást elvégezve kapjuk

$$\mathbf{S}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(1)2} \sigma_1^{(m)2} + r^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} & \sigma_1^{(1)2} r^{(m)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} + r^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)2} \\ r^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(m)2} + \sigma_2^{(1)2} r^{(m)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} & r^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} + \sigma_2^{(1)2} \sigma_2^{(m)2} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ez a mátrix szimmetrikus, ezért a mellékatlón lévő két elem azonos, bár a felírásból nem annak látszik. Ezt a tényt később ki fogjuk használni. Abból, hogy

$$\mathbf{S}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(m+1)2} & r^{(m+1)} \sigma_1^{(m+1)} \sigma_2^{(m+1)} \\ r^{(m+1)} \sigma_1^{(m+1)} \sigma_2^{(m+1)} & \sigma_2^{(m+1)2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

felírható, hogy

$$r^{(m+1)} = \frac{r^{(m)} \sigma_1^{(1)2} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} + r^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)2}}{\sqrt{\sigma_1^{(1)2} \sigma_1^{(m)2} + r^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)}} \cdot \sqrt{r^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} + \sigma_2^{(1)2} \sigma_2^{(m)2}}}. \quad (11)$$

Azt akarjuk belátni, hogy

$$r^{(m+1)} = r^{(m)} \cdot c, \quad (12)$$

ahol $c \geq 1$. Ezen célból és a kényelem kedvéért a (11) formula négyzetével fogunk számolni, de a négyzetre emeléskor a számláló esetében a számlálót a (9)-beli szimmetrikus párjával szorozzuk meg.

$$r^{(m+1)2} = \frac{\left(r^{(m)} \sigma_1^{(1)2} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} + r^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)2} \right) \cdot \left(r^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(m)2} + r^{(m)} \sigma_2^{(1)2} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} \right)}{\left(\sigma_1^{(1)2} \sigma_1^{(m)2} + r^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} \right) \cdot \left(r^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(m)} \sigma_2^{(m)} + \sigma_2^{(1)2} \sigma_2^{(m)2} \right)}. \quad (13)$$

Elvégezve az alábbi kiemeléseket

$$r^{(m+1)2} = \frac{r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(m)} \left(\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right) \cdot r^{(m)} \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(m)} \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} \sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right)}{\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} \left(\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + r^{(1)} r^{(m)} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right) \cdot \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \left(r^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right)} \quad (14)$$

és egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$r^{(m+1)2} = r^{(m)2} \cdot \frac{\left(\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right) \cdot \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} \sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right)}{\left(\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + r^{(1)} r^{(m)} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right) \cdot \left(r^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right)}. \quad (15)$$

(15)-ben a tört számlálója és nevezője nagyon hasonlít egymásra. A különbség csak annyi, hogy míg a számlálóban $\frac{r^{(1)}}{r^{(m)}}$ a szorzó, addig a nevezőben $r^{(1)} r^{(m)}$.

Ugyanakkor fennáll, hogy $\frac{r^{(1)}}{r^{(m)}}$, mivel $\frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} - r^{(1)} r^{(m)} = r^{(1)} \left(\underbrace{\frac{1}{r^{(m)}}}_{\geq 1} - \underbrace{r^{(m)}}_{\leq 1} \right) \geq 0$. Ezért

(15) számlálója nem kisebb, mint a nevezője és így az $r^{(m)2}$ szorzója a jobboldalon legalább 1. Tehát azt kapjuk (az előjel megkötést is figyelembe véve), hogy

$$r^{(m+1)} \geq r^{(m)}. \quad (16)$$

Teljes indukciót használva így a korrelációs együttthatók sorozata monoton növekvő. A korlátosság figyelembe vételével a sorozatnak létezik határértéke. A határértéket ebből a tényből azonban még nem tudjuk megállapítani, ezért visszatérünk (15)-höz és a szorzóra adunk egy alsó becslést, amely egytől nem kisebb és amelynek alkalmazásával a határérték meghatározható. Nevezzük el tehát a (15) szorzóját $c^{(m)2}$ -nek, azaz

$$c^{(m)2} = \frac{\left(\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right) \cdot \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} \sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right)}{\left(\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + r^{(1)} r^{(m)} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right) \cdot \left(r^{(1)} r^{(m)} \sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)} + \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)} \right)}. \quad (17)$$

(17)-ben a számláló és a nevező minden tényezőjét beszorozva $r^{(m)}$ -mel, valamint észrevéve, hogy (17) nem a szórásoktól, hanem csak az

$$x = \frac{\sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(m)}}{\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(m)}} \quad (18)$$

viszonyszámtól függ, amely nemnegatív, (17) tömörebben is felírható az alábbi formában

$$c^{(m)^2} = \frac{(r^{(m)} + r^{(1)}x) \cdot (r^{(1)} + r^{(m)}x)}{(r^{(m)} + r^{(1)}r^{(m)^2}x) \cdot (r^{(1)}r^{(m)^2} + r^{(m)}x)}. \quad (19)$$

Vezessük most be az alábbi rövidített jelöléseket:

$$\alpha = \frac{r^{(m)}}{r^{(m)} + r^{(1)}x} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{r^{(1)}}{r^{(1)} + r^{(m)}x}. \quad (20)$$

Nyilvánvaló, hogy mindkét érték 0 és 1 között lehet csak. Ezek segítségével (19) felírható a következő egyszerű módon:

$$c^{(m)^2} = \frac{1}{(\alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot r^{(m)^2}) \cdot (\beta \cdot r^{(m)^2} + (1 - \beta) \cdot 1)}. \quad (21)$$

A (21) formulában a nevező mindkét zárójeles tényezőjében az $r^{(m)^2}$ és az 1 számok konvex kombinációja áll. A (21) formulára egy éles alsó becslést adunk azáltal, hogy megkeressük a nevező maximumát. A nevezőre alkalmazzuk a számtani közép és a mértani közép között érvényes éles egyenlőtlenséget, mely alapján (21) nevezőjére kapjuk, hogy:

$$(\alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot r^{(m)^2}) \cdot (\beta \cdot r^{(m)^2} + (1 - \beta) \cdot 1) \leq \left(\frac{(\alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot r^{(m)^2}) + (\beta \cdot r^{(m)^2} + (1 - \beta) \cdot 1)}{2} \right)^2. \quad (22)$$

(22)-ben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha a baloldali két zárójeles tényező megegyezik, azaz ha

$$\alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot r^{(m)^2} = \beta \cdot r^{(m)^2} + (1 - \beta) \cdot 1. \quad (23)$$

Ebből az egyenlőségből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$(\alpha + \beta - 1) \cdot (1 - r^{(m)^2}) = 0, \quad (24)$$

ahonnan viszont következik, hogy akkor

$$\alpha + \beta = 1. \quad (25)$$

Tehát, ha van olyan nemnegatív x , hogy (25) fennáll, akkor ott a (21) formula nevezője eléri a maximumát. Maga a maximum a (22) jobboldalába történő behelyettesítéssel kapható meg (25) figyelembevételével. Láthatóan a maximumra az

$$\left(\alpha + (1 - \alpha) \cdot r^{(m)^2} \right)^2 \quad (26)$$

érték adódik. Az ezen maximumot realizáló x -et a (25) formulából a jelölések feloldásával azonnal megtaláljuk. Elvégezve (25)-be a behelyettesítést

$$\frac{r^{(m)}}{r^{(m)} + r^{(1)}x} + \frac{r^{(1)}}{r^{(1)} + r^{(m)}x} = 1 \quad (27)$$

adódik, amelyből közös nevezőre hozás után kapjuk, hogy

$$\frac{r^{(m)}r^{(1)} + r^{(m)^2}x + r^{(1)}r^{(m)} + r^{(1)^2}x}{r^{(m)}r^{(1)} + r^{(1)^2}x + r^{(m)^2}x + r^{(1)}r^{(m)}x^2} = 1. \quad (28)$$

Innen átszorzás, majd egyszerűsítések után marad az

$$r^{(1)}r^{(m)} = r^{(1)}r^{(m)}x^2 \quad (29)$$

összefüggés, amelyből nemnegatív megoldásként az $x=1$ adódik. Tehát a maximumot szolgáltató α értéke (20) alapján

$$\alpha = \frac{r^{(m)}}{r^{(m)} + r^{(1)}} , \quad (30)$$

maga a maximum pedig

$$\left(\alpha + (1 - \alpha) \cdot r^{(m)^2} \right)^2 = \left(\frac{r^{(m)}}{r^{(m)} + r^{(1)}} + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)} + r^{(1)}} \cdot r^{(m)^2} \right)^2 = \left(\frac{r^{(m)} + r^{(1)} r^{(m)^2}}{r^{(m)} + r^{(1)}} \right)^2 . \quad (31)$$

Visszatérve most a (15) formulához négyzetgyökvonás után írható az éles alsó becslés:

$$r^{(m+1)} \geq r^{(m)} \cdot \frac{r^{(m)} + r^{(1)}}{r^{(m)} + r^{(1)} r^{(m)^2}} = r^{(m)} \cdot \frac{1 + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)}}}{1 + r^{(1)} r^{(m)}} . \quad (32)$$

Ebben a formulában láthatóan a jobboldalon a szorzó tört értéke legalább egy, ugyanis a számláló nem kisebb, mint a nevező, hiszen $\frac{r^{(1)}}{r^{(m)}} \geq r^{(1)} r^{(m)} \geq 0$. Ezután a határérték meghatározása (32)-ből már azonnal adódik:

$$1 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(m+1)} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(r^{(m)} \cdot \frac{1 + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)}}}{1 + r^{(1)} r^{(m)}} \right) . \quad (33)$$

Bevezetve az $r^* = \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(m)}$ jelölést, (33)-ban a határátmenet után az

$$1 \geq r^* \geq r^* \cdot \frac{1 + \frac{r^{(1)}}{r^*}}{1 + r^{(1)} r^*} \quad (34)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ahonnan $r^* \neq 0$ miatt

$$1 \geq \frac{1 + \frac{r^{(1)}}{r^*}}{1 + r^{(1)} r^*}, \quad (35)$$

és ezután átszorzással

$$1 + r^{(1)} r^* \geq 1 + \frac{r^{(1)}}{r^*} \quad (36)$$

jön, amelyből az

$$r^{(1)} r^* \geq \frac{r^{(1)}}{r^*} \quad (37)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. (36) azonban csak az $r^* = 1$ esetén állhat fenn, mivel korrelációs értékről van szó.

A lineáris konvergencia bizonyítása: (32)-ből az alábbiak adódnak:

$$r^{(m+1)} \geq r^{(m)} \cdot \frac{1 + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)}}}{1 + r^{(1)} r^{(m)}} \quad (38)$$

$$1 - r^{(m+1)} \leq 1 - r^{(m)} \cdot \frac{1 + \frac{r^{(1)}}{r^{(m)}}}{1 + r^{(1)} r^{(m)}} = \frac{1 + r^{(1)} r^{(m)} - (r^{(m)} + r^{(1)})}{1 + r^{(1)} r^{(m)}} = \frac{(1 - r^{(m)}) \cdot (1 - r^{(1)})}{1 + r^{(1)} r^{(m)}}. \quad (39)$$

Innen pedig

$$\frac{1-r^{(m+1)}}{1-r^{(m)}} \leq \frac{1-r^{(1)}}{1+r^{(1)}r^{(m)}} < 1, \text{ mivel } r^{(1)} > 0. \quad (40)$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

A speciális kétdimenziós eset tárgyalása után rátérünk a többdimenziós eset vizsgálatára. Legyen most A valós, négyzetes, szimmetrikus, nem szinguláris $n \times n$ mátrix. Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ normális eloszlású véletlen változó $(0, I)$ paraméterekkel, ahol a 0 a várható értékek vektora, zérusvektor, I pedig a kovariancia mátrix, egységmátrix. Legyen $(\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)})^T = \boldsymbol{\eta}^{(1)} = A\xi$. Itt is érvényes az, amit az alfejezet elején írtunk, hogy akkor $\eta^{(1)}$ normális eloszlású $(0, AA^T)$ paraméterekkel. Használjuk az alfejezet elején bevezetett jelöléseket, tehát képezzük az $\eta^{(m+1)} = A\eta^{(m)}$, $m=1,2,3,\dots$ véletlen vektorsorozatot. Ennek tagjai normális eloszlásúak, zérusvektor várható értékkel és $S^{(m)} = A^{2m}$, $m=1,2,3,\dots$ kovariancia mátrixszal. Az $S^{(m)}$ kovariancia mátrix szimmetrikus, pozitív definit mátrix

$$S^{(m)} = \begin{pmatrix} s_{11}^{(m)} & s_{12}^{(m)} & \dots & s_{1j}^{(m)} & \dots & s_{1n}^{(m)} \\ s_{21}^{(m)} & s_{22}^{(m)} & \dots & s_{2j}^{(m)} & \dots & s_{2n}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i1}^{(m)} & s_{i2}^{(m)} & \dots & s_{ij}^{(m)} & \dots & s_{in}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}^{(m)} & s_{n2}^{(m)} & \dots & s_{nj}^{(m)} & \dots & s_{nn}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad (41)$$

amely az alábbi formában is írható:

$$S^{(m)} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(m)2} & r_{12}^{(m)}\sigma_1^{(m)}\sigma_2^{(m)} & \dots & r_{1j}^{(m)}\sigma_1^{(m)}\sigma_j^{(m)} & \dots & r_{1n}^{(m)}\sigma_1^{(m)}\sigma_n^{(m)} \\ r_{21}^{(m)}\sigma_2^{(m)}\sigma_1^{(m)} & \sigma_2^{(m)2} & \dots & r_{2j}^{(m)}\sigma_2^{(m)}\sigma_j^{(m)} & \dots & r_{2n}^{(m)}\sigma_2^{(m)}\sigma_n^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i1}^{(m)}\sigma_i^{(m)}\sigma_1^{(m)} & r_{i2}^{(m)}\sigma_i^{(m)}\sigma_2^{(m)} & \dots & r_{ij}^{(m)}\sigma_i^{(m)}\sigma_j^{(m)} & \dots & r_{in}^{(m)}\sigma_i^{(m)}\sigma_n^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}^{(m)}\sigma_n^{(m)}\sigma_1^{(m)} & r_{n2}^{(m)}\sigma_n^{(m)}\sigma_2^{(m)} & \dots & r_{nj}^{(m)}\sigma_n^{(m)}\sigma_j^{(m)} & \dots & \sigma_n^{(m)2} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

A (42) formulában $r_{ij}^{(m)}$ korrelációs együttható az $\eta_i^{(m)}$, és $\eta_j^{(m)}$ véletlen változók között, valamint $\sigma_i^{(m)}$ az $\eta_i^{(m)}$ szórása. Definíció szerint:

$$\sigma_i^{(m)^2} = s_{ii}^{(m)} \text{ és } r_{ij}^{(m)} = \frac{s_{ij}^{(m)}}{\sqrt{s_{ii}^{(m)}} \cdot \sqrt{s_{jj}^{(m)}}} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n. \quad (43)$$

A korrelációs együtthatókból álló mátrixot, amely a kovariancia mátrixból a soroknak és az oszlopoknak a szórással (diagonális elem négyzetgyöke) történő leosztásával adódik, korrelációs mátrixnak nevezzük. Alakja:

$$\mathbf{R}^{(m)} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12}^{(m)} & \dots & r_{1j}^{(m)} & \dots & r_{1n}^{(m)} \\ r_{21}^{(m)} & 1 & \dots & r_{2j}^{(m)} & \dots & r_{2n}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i1}^{(m)} & r_{i2}^{(m)} & \dots & r_{ij}^{(m)} & \dots & r_{in}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1}^{(m)} & r_{n2}^{(m)} & \dots & r_{nj}^{(m)} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Ez a mátrix szimmetrikus, főátlóján egyesek állnak. Az eddigiek alapján látható, hogy a kiinduló véletlen vektor koordinátái nem korreláltak (a páronkénti korrelációs együtthatójuk zérus, amely a függetlenségből következik), az iterált vektorok koordinátái általában korreláltak lesznek (a páronkénti korrelációs együtthatók általában nem zérusok). A kétdimenziós esethez hasonló jelenséget keresünk a korrelációk alakulására az iteráció során az n dimenziós esetben. Itt a kép összetettebb. Kimondhatjuk a következő, általam igazolt tételt:

2. Tétel: *A koordináták korrelációjának konvergenciája n dimenzióban*

A hatvány módszer iterációja során elhagyva a normalizálást a legnagyobb sajátérték egyszeres multiplicitása esetén a korrelációs mátrixra és a páronkénti korrelációs együtthatókra teljesül, hogy

$$\text{rank}(\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{R}^{(m)}) = 1 \text{ és } \lim_{m \rightarrow \infty} r_{ij}^{(m)} = a, \text{ ahol } a^3 = a, a \in \mathbf{R}. \quad (45)$$

Bizonyítás: A (45) formulában szereplő a -nak nincs igazán szerepe, csupán röviden fejezzük ki azt a tényt, hogy a limesz értéke -1, 0, vagy 1. Feltesszük, hogy az A mátrix sajátértékei csökkenő sorrendben vannak felsorolva, és hogy a legnagyobb sajátérték multiplicitása egyszeres, azaz $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$. Az $\mathbf{S}^{(m)}$ mátrix helyett az

$$\mathbf{S}^{*(m)} = \frac{1}{\lambda_1^{2m}} \mathbf{S}^{(m)} \quad (46)$$

mátrixot fogjuk tanulmányozni. Ez a dolgok lényegét nem változtatja meg, mivel a korrelációk nem változnak meg, ha a kovariancia mátrixot nemzérus konstanssal szorozzuk. (Tulajdonképpen ez azt jelenti, mintha az iteráció folyamán a normalizálás helyett mindig λ_1 -gyel leosztanánk. Ezzel azt érjük el, hogy az iterált vektor ne fajuljon el, hossza se a zérus, se a végtelen felé ne fusson el, de konstans vektorrá se váljon, mert akkor már nem valódi véletlen változó.) Most felhasználjuk a Schur-Töplitz tételt és az A mátrixot az $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ alakban írjuk fel, ahol $\mathbf{V}$ ortogonális mátrix, oszlopai a normalizált sajátvektorok, $\mathbf{D}$ pedig diagonális mátrix, főátlóján a nagyság szerint csökkenő sorrendű sajátértékekkel. Ebből a felírásból következik, hogy

$$\mathbf{S}^{(m)} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{2m}\mathbf{V}^T, \quad (47)$$

azaz

$$\mathbf{S}^{(m)} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda_1^{2m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{2m} \end{pmatrix} \mathbf{V}^T. \quad (48)$$

A korrelációs együtthatók nem változnak, ha azokat az $\mathbf{S}^{*(m)}$ mátrixból határozzuk

meg, nem pedig az $\mathbf{S}^{(m)}$ -ből. A mátrixunk akkor

$$\mathbf{S}^{*(m)} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^{2m}}{\lambda_1^{2m}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n^{2m}}{\lambda_1^{2m}} \end{pmatrix} \mathbf{V}^T. \quad (49)$$

Most (49)-ben m szerint a végtelenben határértéket véve kapjuk, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{S}^{*(m)} = \mathbf{S}^* = \mathbf{V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}^T. \quad (50)$$

Jelöljük most a $\mathbf{V}$ oszlopait a $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}$ vektorokkal. Akkor írhatjuk (alsó indexben a vektor koordináta indexe), hogy

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)T} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^{(1)} \cdot \mathbf{v}_1^{(1)} & \mathbf{v}_1^{(1)} \cdot \mathbf{v}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{v}_1^{(1)} \cdot \mathbf{v}_n^{(1)} \\ \mathbf{v}_2^{(1)} \cdot \mathbf{v}_1^{(1)} & \mathbf{v}_2^{(1)} \cdot \mathbf{v}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{v}_2^{(1)} \cdot \mathbf{v}_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_n^{(1)} \cdot \mathbf{v}_1^{(1)} & \mathbf{v}_n^{(1)} \cdot \mathbf{v}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{v}_n^{(1)} \cdot \mathbf{v}_n^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

A kapott mátrix a $\mathbf{v}^{(1)}$ vektornak a saját magával vett diadikus szorzata, így rangja egy. Másrészt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_{ij}^{(m)} = r_{ij}^* = \frac{s_{ij}^*}{\sqrt{s_{ii}^*} \cdot \sqrt{s_{jj}^*}} = \frac{\mathbf{v}_i^{(1)} \cdot \mathbf{v}_j^{(1)}}{\sqrt{\mathbf{v}_i^{(1)2}} \cdot \sqrt{\mathbf{v}_j^{(1)2}}} = \text{sign}(\mathbf{v}_i^{(1)}) \cdot \text{sign}(\mathbf{v}_j^{(1)}). \quad (52)$$

Ezzel a tétel bizonyítása véget ér. ■

A tétel bizonyításából kitűnik az is, hogy miért nem figyelhető meg a korrelációk konvergenciájára hasonló jelenség általában, ha a legnagyobb sajátérték multiplicitása több mint egy. Legyen ugyanis a multiplicitás k , akkor az $\mathbf{S}^*$ mátrix az (51) formulában a következő alakú lenne:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)T} + \dots + \mathbf{v}^{(k)} \cdot \mathbf{v}^{(k)T}. \quad (53)$$

A k darab sajátvektor saját magával vett diadikus szorzatának az összege már „elrontja” az egységnyi korrelációk kialakulását.

Megjegyzés: A tétel alkalmas lehet a legnagyobb sajátérték egyszeres vagy nem egyszeres multiplicitása kérdésének az eldöntésére is. Ez a tény elvileg is és gyakorlatilag is fontos lenne, de további tanulmányozást, kutatást igényel, és nem tartozik az értekezés céljaihoz, viszont mindenképpen pozitív mellék eredmény.

Az (53) formula alapján az $\mathbf{S}^*$ mátrix oszlopai által kifeszített altér egy ortonormált bázisának a megkeresésével (pivotálási technika, Gram-Schmidt ortogonalizáció) a legnagyobb sajátértékhez tartozó ortonormált sajátvektorok meghatározása is megoldható legalább is elvben. A probléma numerikus vonzatára nem térünk ki.

5.7. Statisztikai számítások

Legyen az implementáció inputja a ξ n -dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ennek sűrűségfüggvénye:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in R^n. \quad (1)$$

Legyen az $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ mátrix-vektor szorzás egy lehetséges helyes implementációja pszeudokóddal:

```

FOR  i←1  TO n DO
    w←0
    FOR  j←1 TO n DO
        w←w+aij·xj
    yi←w.

```

Akkor az outputra csak egy iterációs lépést számolva, és nem végezve el a normalizálást, az $\eta = A\xi$ a priori eloszlásunk n -dimenziós normális eloszlás, melynek paraméterei a zérusvektor várható érték, és az $S = AA^T$ kovariancia mátrix. Ennek megfelelően az η output sűrűségfüggvénye:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(S)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T S^{-1} \mathbf{x}}. \quad (2)$$

Az η entrópiája:

$$\begin{aligned}
 H(\eta) &= \int_{R^m} p(\mathbf{x}) \log \frac{1}{p(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{R^m} p(\mathbf{x}) \left(\log \left(\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(S)} \cdot e^{\frac{1}{2}\mathbf{x}^T S^{-1} \mathbf{x}} \right) \right) d\mathbf{x} = \\
 &= \int_{R^m} p(\mathbf{x}) \frac{1}{2} (n \cdot \log(2\pi) + \log \det(S) + \mathbf{x}^T S^{-1} \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[n \cdot \log(2\pi) + \log \det(S) + \int_{R^m} \mathbf{x}^T S^{-1} \mathbf{x} \cdot p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[n \cdot \log(2\pi) + \log \det(S) + \int_{R^m} \text{Tr}(S^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^T) \cdot p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(S) + \text{Tr}(S^{-1} S)] = \\
 &= \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(S) + n].
 \end{aligned} \quad (3)$$

Ha a helytelen implementáció során például a gyűjtőrekesz nullázását rossz helyre tesszük, akkor lehet az alábbi a pszeudokód.

```

w ← 0
FOR i ← 1 TO n DO
    FOR j ← 1 TO n DO
        w ← w + aij · xj
    yi ← w.

```

Ebben az esetben az output $\eta_q = \mathbf{U}\mathbf{A}\xi$ a posteriori eloszlásunk $\mathbf{n}$ -dimenziós normális eloszlás, melynek paraméterei a zérusvektor várható érték, és az $\mathbf{S}_q = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^T$ kovariancia mátrix, ahol az $\mathbf{U}$ mátrix olyan alsó háromszög mátrix, amelynek főátlóján és alatt csupa egységelemek állnak. Teljesül, hogy $\det(\mathbf{S}_q) = \det(\mathbf{S})$. Ennek megfelelően a sűrűségfüggvénye:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(\mathbf{S}_q)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{S}_q^{-1} \mathbf{x}}. \quad (4)$$

Az $T(\eta_q \| \eta)$ inakkurancia :

$$\begin{aligned}
 T(\eta_q \| \eta) &= \int_{R^m} q(\mathbf{x}) \log \frac{1}{p(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{R^m} q(\mathbf{x}) \left(\log \left(\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(\mathbf{S})} \cdot e^{\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}} \right) \right) d\mathbf{x} = \\
 &= \int_{R^m} q(\mathbf{x}) \frac{1}{2} (n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \mathbf{x}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \int_{R^m} \mathbf{x}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} \cdot q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \int_{R^m} \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{x} \mathbf{x}^T) \cdot q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_q)] = \\
 &= \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1} (\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^T))].
 \end{aligned} \quad (5)$$

Látjuk, hogy

$$H(\eta) = \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S})] = \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + n] \quad (6)$$

és

$$\begin{aligned} T(\eta_q \| \eta) &= \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}_q)] = \\ &= \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + \text{Tr}(\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^T))] \end{aligned} \quad (7)$$

csak az utolsó tagban térnek el egymástól. Az utóbbi tag (7) most kiszámítható volt, mert tudtuk, hogy mi a hiba az implementációban. Valójában a hiba ismeretlen, ezért $T(\eta_q \| \eta)$ -ra csak egy statisztikai becslést adhatunk. Az implementáció inputjaként generálva egy k elemű mintát (n dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektorok), majd ezekkel az implementációt tesztelve, onnan outputként az $\mathbf{x}_i$ vektorokat kapva azokból kiszámíthatjuk a

$$\hat{T}(\eta_q \| \eta) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \cdot \log \frac{1}{p(\mathbf{x}_i)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \log \frac{1}{p(\mathbf{x}_i)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \log \left(\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(\mathbf{S})} \cdot e^{\frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_i} \right) \quad (8)$$

becslést, és összehasonlíthatjuk $H(\eta)$ -val, ami viszont számítható, mert a hibától nem függ. Itt most a (3) alapján

$$H(\eta) = \frac{1}{2} [n \cdot \log(2\pi) + \log \det(\mathbf{S}) + n]. \quad (9)$$

A $\hat{T}(\eta_q \| \eta)$ becslés várható értéke a hibátlan implementációt feltételezve a nagy számok törvénye szerint éppen $H(\eta)$, a fent említett hiba esetében pedig $T(\eta_q \| \eta)$. Nagy minta esetén most alkalmazható a centrális határeloszlás tétel. Alkalmazásával $\hat{T}(\eta_q \| \eta)$ -ra mondhatjuk, hogy normális eloszlású. A $\log p(\mathbf{x}_i)$ elemek segítségével

$\hat{T}(\eta_q \| \eta)$ szórásnégyzetét az empirikus szórásnégyzettel becsülve egy t -próba segítségével eldönthetjük, hogy $\hat{T}(\eta_q \| \eta)$ eltérése $H(\eta)$ -tól szignifikáns-e, vagy sem. Sőt, tovább menve, miután itt valóban nagy mintáról van szó, ezért olyan szabadságfokok adódnak a t -statisztikára, hogy ott a t -próba és az u -próba kritikus értékei gyakorlatilag már nem különböznek egymástól, ezért akár az u -próbát is alkalmazhatjuk. Például számolhatunk a 3-sigma szabállyal, ha kb. 0,01-es (1%-os) szignifikancia szintet használunk.

A tárgyalt esetben láthatjuk, hogy az entrópia és az inakkurancia – (9) és (7) – csak egy additív tagban különböznek egymástól, továbbá mindkét szereplő eloszlás normális eloszlás. A 4. fejezetben említett konvergencia ezért fennáll. A Mellékletben található MATLAB programban a paraméterek változtatgatása által különböző esetekre futtatásokat végeztünk 3-szigmás u -próbát alkalmazva döntési szabályként. Az alábbi táblázatokban foglaltuk össze az eredményeket. A baloldali táblázatban a helyesen, a jobboldali táblázatban a helytelenül implementált szorzási algoritmus helyesnek ítélt elfogadás száma található a döntések eredményeképpen a mintaméret és az azon mintaméret esetén elvégzett tesztek száma függvényében. Minden testben más és más, véletlenszerűen generált, szimmetrikus, pozitív definit mátrixszal dolgoztunk.

Helyes implementáció		Tesztek száma			
		10	100	1000	10000
Mintaméret	10	10	99	997	9946
	100	10	100	1000	10000
	1000	10	100	1000	10000
	10000	10	100	1000	10000

Helytelen implementáció		Tesztek száma			
		10	100	1000	10000
Mintaméret	10	10	100	1000	9994
	100	2	33	349	3661
	1000	0	0	3	31
	10000	0	0	0	0

Látható, hogy a minta méretének növekedésével a hibás döntések száma rohamosan csökken. Elfogadható mintaméretnek az 1000 fölötti látszik. (Ekkor már működni kezd a nagy számok törvénye és a centrális határeloszlás tétel is.)

6. Eredmények

Saját eredményeknek lehet tekinteni az alábbi tételeket, eredményeket:

- I. 5.3.2. Tétel: Alsó és felső valószínűségi becslés
- II. 5.3.3. Tétel: A becslés élességének jellemzése
- III. 5.3.4. Tétel: A hatvány módszer sztochasztikus konvergenciája elemi bizonyítása
- IV. 5.5.1. Tétel: Az $F_{n,k}^{(m)}(x)$ eloszlásfüggvény lokális tulajdonsága
- V. 5.6.1. Tétel: A koordináták korrelációjának konvergenciája
- VI. 5.6.2. Tétel: A koordináták korrelációjának konvergenciája n dimenzióban
- VII. Az 5.7 fejezetben a diszkrimináló információ felhasználása programhelyesség tesztelési céljára.
- VIII. Megjegyzés az 5.6.2 tételhez, a legnagyobb sajátérték multiplicitásának detektálása

További eredmény, amely korábban született, a Cauchy eloszlás paraméterbecslésével kapcsolatban nyert 4.11 és 4.18 formulák, a konvergencia tétel, valamint az azt követően bizonyított tétel a minimumhely egyértelműségéről.

7. Summary

This PhD dissertation deals with the problem of randomization of algorithms and program testing. It contains some new results, especially in connection with the iterative power method for computing the largest eigenvalue of the positive definite, symmetric matrix. The input of the algorithm of the power method is randomized by generating standard, normally distributed random vectors in the n -dimensional space. The behavior of the output of the algorithm is analysed. The first four sections play the role of introductional character of the notion of algorithm, program, correctness of program, randomization of algorithms. The main results are discussed in the fifth section and its subsections. Results are formulated in theorems below.

Theorem: The probability of the event that the tangent of the angle between the iterated vector and the eigensubspace of the largest eigenvalue is smaller than a given ε has both a lower and an upper bound in the m -th step of the iteration. Let n be the dimension, k be the multiplicity of the largest eigenvalue and the eigenvalues are written in descending order that is $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Let $F_{n,k}^{(m)}(x)$ be the distribution function of the tangent of the angle in the m -th step of the iteration, $F_{n,k}^{(0)}$ be the distribution function of the absolute value of the F -statistics with degree of freedom $(n-k, k)$, $F_{|t_k|}$ be the distribution function of the absolute value of the t -statistics with the degree of freedom k . Let us denote $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$ and

$$c_{n,k}^{(m)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n-k} \mu_{k+j}^{2m}}{k \cdot (n-k)}}. \text{ Then the following inequality holds,}$$

$$F_{n,k}^{(0)}(\varepsilon / \mu_{k+1}^m) \leq F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) \leq F_{|t_k|}(\varepsilon / c_{n,k}^{(m)}).$$

Theorem: If there are only two different eigenvalues, that is, $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n$, then equality holds in the formula above.

Theorem: In the case of the standard normally distributed input the power method

converges stochastically to some vector of the eigensubspace of the largest eigenvalue. This vector lies on the straight line of the orthogonal projection of the input vector to the eigensubspace and the largest eigenvalue can be represented as the limit of the geometrical mean of the stepwise enlarging factors in the iteration.

Theorem: For small $\varepsilon > 0$ the local property $F_{n,k}^{(m)}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{n-k})$ holds.

Theorem: In the two dimensional case for the pairwise correlation of the iterated vector, holds $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{(m)} = \text{sign}(r^{(1)})$. Here $r^{(1)}$ is the correlation coefficient after the first step of the iteration and $r^{(m)}$ in the m -th step as well. The rate of convergence is linear.

Theorem: In the n -dimensional case by omitting the normalization in the power method, for the correlation matrix $\mathbf{R}^{(m)}$ and the pairwise correlations $r_{ij}^{(m)}$ of the iterated vector coordinates hold $\text{rank}(\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{R}^{(m)}) = 1$ and $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{ij}^{(m)} = a_{ij}$, where $a_{ij} = -1, 0, +1$, assuming that the multiplicity of the largest eigenvalue is one.

Remark: This theorem may be used for making decision about the multiplicity of the largest eigenvalue.

The discrimination information approach provides us with a method of program verification. This approach were used earlier to work out an iterative method for the estimation of the parameters of the Cauchy distribution. These results were published in [12, 23].

Függelék

Valószínűség-számítási és statisztikai fogalmak, tételek

A szakaszban összefoglaljuk azokat a valószínűség-számítási fogalmakat, amelyekre a vizsgálatban szükségünk van. Főként a formulák miatt idézzük ezeket, mivel nehéz pontosan emlékezni rájuk.

Definíció: *Az egydimenziós standard normális eloszlás*

Egy ξ véletlen változót standard normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (1)$$

A függvény értelmezve van minden valós x esetén.

A szoftverek és programozási nyelvek általában biztosítják, hogy standard normális eloszlású (pszeudó-)véletlen számot elő tudjunk állítani.

Definíció: *Az egydimenziós normális eloszlás*

Egy ξ véletlen változót (m, σ^2) paraméterű normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}. \quad (2)$$

A függvény értelmezve van minden valós x esetén. A paraméterek: m valós szám, σ valós pozitív szám.

1. Tétel: *Normális és standard normális eloszlás kapcsolata*

Ha ξ standard normális eloszlású véletlen változó, akkor $\eta = \sigma\xi + m$ eloszlása (m, σ^2) paraméterű normális eloszlás.

Definíció: *Az n -dimenziós standard normális eloszlás*

Egy $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ véletlen vektorváltozót n -dimenziós standard normális eloszlásúnak nevezünk, ha koordinátáinak közös sűrűségfüggvénye:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{x}}. \quad (3)$$

A függvény értelmezve van minden $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vektor esetén.

2. Tétel: *Normális eloszlások összegének eloszlása*

Független normális eloszlású véletlen változók összegének az eloszlása is normális. Az összeg eloszlásában a paramétereket illetően az m szerinti paraméterek is és a σ^2 szerintiek is összeadódnak.

Definíció: *Az n -dimenziós normális eloszlás*

Egy $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ véletlen vektorváltozót $(\mathbf{m}, \mathbf{S})$ paraméterű n -dimenziós normális eloszlásúnak nevezünk, ha koordinátáinak közös sűrűségfüggvénye:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det(\mathbf{S})}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}. \quad (4)$$

Minden $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vektor esetén. A paraméterek: $\mathbf{m} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{S}$ pozitív definit mátrix. Az $\mathbf{m}$ vektor neve várható érték vektor, $\mathbf{S}$ neve kovariancia mátrix.

3. Tétel: *Normális és standard normális eloszlás kapcsolata n -dimenzióban*

Ha ξ n -dimenziós standard normális eloszlású véletlen változó, akkor az $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\xi + \mathbf{m}$ véletlen vektor eloszlása n -dimenziós normális eloszlású $(\mathbf{m}, \mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ paraméterekkel.

Definíció: *A t-eloszlás (Student eloszlás)*

Egy ς véletlen változót k paraméterű t eloszlású véletlen változónak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}. \quad (5)$$

Az x valós. A k paraméter pozitív egész szám lehet, neve szabadsági fok.

4. Tétel: *t-eloszlás előállítása standard normálisokkal*

Legyenek $\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ független standard normális eloszlású véletlen változók. Akkor

$$\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_k^2}{k}}} \quad (6)$$

eloszlása k szabadságfokú t -eloszlás.

Definíció: *Az F eloszlás*

Egy ς véletlen változót (m, n) paraméterű F eloszlású véletlen változónak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (7)$$

Az m és n paraméterek pozitív egész számok lehetnek, nevük szabadsági fok.

5. Tétel: *Négyzetösszegek hányadosának eloszlása*

Független standard normális eloszlású véletlen változók négyzetösszegeinek hányadosa F eloszlást követ. Nevezetesen, ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ mindegyike standard normális eloszlású és együtt teljesen független rendszert alkotnak, akkor

$$\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2} \quad (8)$$

F -eloszlású (m, n) szabadságfokkal

Bizonyítás: lásd [50]. (Nem teljesen egységes a szakirodalomban az F eloszlás elnevezése a (7) formulát illetően. A statisztikában a (8) formula számlálójában is és nevezőjében is leosztanak a szabadságfokkal, és az így kapott mennyiség eloszlását nevezik F eloszlásnak.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Nagy Ferenc: *Többváltozós regressziószámítás*, Csepel Vas-és Fémművek ISZI Évkönyv. Budapest, 1974, 157-174. oldal
2. Nagy Ferenc, Bokor József: *Kísérlettervezési program regressziós modellépítésre és optimalizálásra*, Csepel Vas-és Fémművek ISZI Évkönyv. Budapest, 1975, 145-157. oldal
3. Nagy Ferenc: *Kristálysírké rászparaméterének megállapítása röntgensugaras mérések eredményéből*, Csepel Vas-és Fémművek ISZI Évkönyv. Budapest, 1975, 158-165 oldal
4. Nagy Ferenc: *FORTRAN programozási tudományos eljárás gyűjtemény*, Csepel Vas-és Fémművek ISZI Évkönyv. Budapest, 1975, 221-225. oldal
5. Nagy Ferenc: *Számítástechnika. Hardware alapismeretek*, NME VAFK, Kazincbarcika. 1980, (Főiskolai jegyzet) 87 oldal + 5 melléklet
6. Nagy Ferenc társszerzőkkel: *FORTRAN programozási feladatgyűjtemény I.*, NME VAFK, Kazincbarcika. 1980, (Főiskolai jegyzet) + 140 oldal
7. Nagy Ferenc: *Számítástechnika. A FORTRAN programozási nyelv*, NME VAFK, Kazincbarcika. 1981. (Főiskolai jegyzet) 130 oldal + 10 melléklet
8. Nagy Ferenc: *Véletlenszámok generálása*. 14. Software értesítő. NME Miskolc. 1982
9. Nagy Ferenc: Perszonalnűj kompjuiter v ucsebnom processze, "Intenzifikacija, komplektnoszty i efektyivnoszty pri razvedke i dobucse minyeralnogo szürja" Tudományos konferencia, Szófia, 1983. május 25-27.
10. Nagy Ferenc: *Ocenyivanyije parametrov rászpregyelenyija Kosi*, Third Conference of Program Designers, Budapest, 1987. pp: 231-238
11. Nagy Ferenc: *Az egydimenziós Cauchy eloszlás és paraméterbecslése*, NME, Matematikai Intézet Miskolc, 1988, (Az EGPO-59/86 állami szerződéses munka keretében. Témavezető: dr. Klafszky Emil)
12. Nagy Ferenc : *A Cauchy eloszlás paraméterbecslése*, Egyetemi doktori értekezés. Miskolci Egyetem, 1990.
13. *Matematikai szoftverek*, Egyetemi segédlet (szerkesztette dr. Galántai Aurél) Miskolci Egyetem 1994. (Nagy Ferenc: Bevezetés a DERIVE 2.58 használatába fejezete.)

14. Nagy Ferenc: *Valószínűségi becslések a hatvány módszer randomizálásában*, Doktori Fórum 2003. nov. 6. Miskolci Egyetem
15. Nagy Ferenc: *Two-sided probability bound estimates in the randomized power method*, MicroCAD 2004 Conference, Miskolc
16. Nagy Ferenc: *Egy eloszlásfüggvény kiszámításáról*, Doktori Fórum 2004. nov. 4-9, pp. 191-204, Miskolci Egyetem
17. Nagy Ferenc: *Egy eloszlásfüggvény lokális viselkedéséről*, Doktori Fórum 2005. nov. 9, pp. 191-204, gépész, pp. 154-156, Miskolci Egyetem
18. Raisz Péter, Fegyverneki Sándor, Nagy Ferenc: *A Cox-regresszió alkalmazásának korlátai*, Gazdaságmodellezési Szakértői Konferencia, Velence, 2005. jan. 27-29.
19. Nagy Ferenc: *Valószínűségi becslések sajátérték meghatározásakor*, Gazdaságmodellezési Szakértői Konferencia, Velence, 2005. jan. 27-29.
20. Nagy Ferenc: *An elementary proof for the correlation of the coordinates in the two dimensional power method*, MicroCAD 2005 Conference, Miskolc, 2005. 03. 10-11.
21. Nagy Ferenc: *A Cauchy eloszlás paraméterbecslése információelméleti megközelítésben*, IF2005Konferencia, Debrecen, 2005. 08. 24-26. Abstract p. 175. CD teljes szöveg (ISBN: 963 472 909 6)
22. Nagy Ferenc: *Correlation relations in the randomized power method*, MicroCAD 2006 Conference, Miskolc, 2006. 03. 16-17, G. szekció, pp. 79-81.
23. Nagy Ferenc: *Parameter Estimation of the Cauchy Distribution in Information Theory Approach*, Journal of Universal Computer Science, vol. 12 No. 9 (2006) pp. 1332-1344. (impakt faktor: 0.338)
24. Raisz Péter, Fegyverneki Sándor, Nagy Ferenc: *Remarks on Cox-regression*, MicroCAD 2007 Conference, Miskolc, 2007. 03. 22-23, Section G. pp. 59-62.

25. ALAGIĆ, Suad; ARBIB, Michael A.: *The Design of Well Structured and Correct Programs*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1978
26. BERRY, Michael W.; BROWNE, Murray: *Understanding Search Engines: Mathematical Modeling and Text Retrieval*, SIAM, Philadelphia, 1999
27. BLAHUT, Richard E.: *Principles and Practice of Information Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1987
28. CHATELIN, Françoise: *Eigenvalues of Matrices*, John Wiley and Sons, New York, 1993
29. Del CORSO, Gianna M.: *Estimating an eigenvector by the power method with a random start*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **18**, No. **4**. pp. 913-937, 1997
30. DEÁK ISTVÁN: *Random number generators and simulation*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990
31. DWIGHT, H. B.: *Tables of integrals and other mathematical data*, The MacMillan Company, New York, 1961
32. FADDEEV, D. K. and FADDEEVA, V. N.: *Computational Methods of Linear Algebra*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1963
33. FRIEDMAN, J.: *Error bounds on the power method for determining the largest eigenvalue of symmetric, positive definite matrix*, Linear Algebra and its Applications, **280** (1998) pp. 199-216
34. GALÁNTAI AURÉL, JENEY ANDRÁS: *Numerikus módszerek*, Miskolci Egyetem Kiadó, Miskolc, 1998
35. GANTMAHER, F. R.: *Tyeorija matric*, Nauka, Moszkva, 1967
36. GELFAND, I. M.: *Lekcii po linyejnoj algebre*, Nauka, Moszkva, 1971
37. GOLDMAN, S.: *Information Theory*, Prentice Hall Inc., New York, 1953
38. GRAY, R. M.: *Entropy and Information Theory*, Springer Verlag, New York, Berlin, 1990
39. GRIES, David: *The Science of Programming*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981

40. JESSUP, E. R.: *A Statistical Evaluation of Inverse Iteration*, NATO ASI Series, Vol. F70, Numerical Linear Algebra, Digital Signal Processing and Parallel Algorithms, Edited by G. H. Golub and P. Van Dooren, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991
41. KRÜLOV, V. I.; BOBKOV, V. V.; MONASZTÜRNÜJ, P. I.: *Vücsiszlityelnüje metodü vüszsej matyematyiki*, tom 1, Vüsejsaja skola, Minszk, 1972
42. KUCZYŃSKI, J.; WOZŃIAKOWSKI, H.: *Estimating the largest eigenvalue by the power and Lanczos algorithms with a random start*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **13**(1992), pp. 1094-1122
43. KULLBACK, S.: *Information Theory and Statistics*, John Wiley & Sons. Inc. New York, 1959
44. LANGVILLE, A. N. and MEYER, C. D.: *Understanding Web Search Engine Rankings: Google's PageRank, Teoma's HITS and other ranking algorithms*, Princetown University Press, Princetown, 2005
45. MARGULIS, L. F.: *O szvjazi algoritmov ZI i prjamogo sztyepennogo metoda*, Dokl. Akad. Nauk Tadz. SSR. **32** No **4**. (1989) pp. 218-222
46. OLIVEIRA, S. & STEWART, D.: *Writing Scientific Software: A Guide to Good Style*, Cambridge University Press, New York, 2006
47. PARLETT, B. N.: *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1980.
48. PITUK, MIHÁLY: *Nonnegative iterations with asymptotically constant coefficients*, Linear Algebra and Its Applications **431**(2009) pp 1815-1824
49. PITUK, MIHÁLY: *A link between the Perron-Frobenius theorem and Perron's theorem for difference equations*, Linear Algebra and Its Applications **434**(2011) pp 490-500
50. RAO, C. R.: *Linear statistical inference and its applications*, John Wiley and Sons Inc., New York-London-Sidney, 1965
51. STOYAN G., TAKÓ G.: *Numerikus módszerek I*; ELTE-TypoTex, Budapest, 1993
52. UEBERHUBER, Ch. W.: *Numerical Computation, Method, Software, and Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1997

53. VARGA LÁSZLÓ, *Rendszerprogramok elmélete és gyakorlata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978
54. VARGA LÁSZLÓ, *Programok analízise és szintézise*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981
55. WILKINSON, J. H.: *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford, Clarendon Press, 1988

MELLÉKLET

```

%                                imp.m program
%
clear all
home;
disp('=====')
disp('=====   Program véletlen tesztelése=====')
disp('=====   Mátrixszorzás / Hatvány módszer   =====')
disp('=====')
%
n =                3;           % dimenziószám
probalkozas = 1000;           % megvizsgált esetek (tesztek) száma
meret =          10000;        % eseten belül a mintaméret
maxiter =         1;           % maximális iterációszám egy mintaelemre
randn('state',1);
%
jo = 0;             %

disp(strcat('proba   H       T-3s   T       T+3s'))
for proba = 1 : probalkozas,
%
    a = randn(n,n);           % mátrix generálás standard normális eloszlásból

    es = eye(n,n);            % egységmátrix előállítása
                                % iterációszámnak megfelelő szimmetrikus mátrix
    for iter = 1 : maxiter,
        es = a * es * a';
    end;
es;
det(es);
es_inverz = inv(es);

                                % y a helyes algoritmus eredménye
                                % z a hibás algoritmus eredménye
sumy = 0; sumy2 = 0;           % inicializálás összegre és négyzetösszegre
sumz = 0; sumz2 = 0;
for ik = 1 : meret,
    xy = randn(n,1);           % véletlen kezdővektor (mintaelem) előállítása
    xz = xy;

                                % y=A*x helyesen
                                % z=A*x hibásan
    for iter = 1 : maxiter,
        y = Helyes_szorzas(a,xy);
        z = Rossz_szorzas(a,xz);
        xy = y;
        xz = z;
    end;
end;
end;

```

```

end;

y = y';
z = z';
qy = y' * es_inverz * y;
qz = z' * es_inverz * z;
y = y';
z = z';
sumy = sumy + qy; sumy2 = sumy2 + qy * qy;
sumz = sumz + qz; sumz2 = sumz2 + qz * qz;
end;

% a H entrópia kiszámítása
H = 0.5 * (n * log(2 * pi) + log(det(es)) + n);
%
% a H entrópia becslése ellenőrzésképpen
atlag_y = sumy / meret;
szoras_y = sqrt( sumy2 / meret - atlag_y * atlag_y ) / sqrt(meret);
%
% a T inakkurancia becslése
atlag_z = sumz / meret;
szoras_z = sqrt( sumz2 / meret - atlag_z * atlag_z ) / sqrt(meret);
%
T = 0.5 * (n * log(2 * pi) + log(det(es)) + atlag_z);
%
if (((T - 3 * szoras_z) < H) & (H < (T + 3 * szoras_z))),
    % Lehet, hogy jó az implementáció
    jo = jo + 1;
    dontes = 'Rendben';
else
    % Hibás implementáció
    dontes = 'Hibás';
end;
%'
disp([num2str(proba),' ',num2str(H),' ', ...
    num2str(T - 3 * szoras_z),' ',num2str(T),' ',num2str(T + 3 * szoras_z), ...
    ' ', dontes]);

end;

disp([num2str(probalkozas), ' esetből ', num2str(jo), ' volt jó.']);

%-----
%               imp.m vége
%-----

```

```
function [z] = rossz_szorzas(a,x)
```

```
    [m,n] = size(a);
    sz = 0;
    for i = 1 : m,
        for j = 1 : n,
            sz = sz + a(i,j) * x(j);
        end;
        z(i) = sz;
    end;
return
```

```
function [y] = helyes_szorzas(a,x)
```

```
    [m,n] = size(a);  
    for i = 1 : m,  
        sy = 0;  
        for j = 1 : n,  
            sy = sy + a(i,j) * x(j);  
        end;  
        y(i) = sy;  
    end;  
return
```
