MISKOLCI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Szimmetrikus stabil eloszlások paramétereinek egy robusztus becslési eljárása és alkalmazása

doktori (PhD) értekezés tézisei

Készítette:
Csendes Csilla
okleveles közgazdasági programozó matematikus

HATVANY JÓZSEF INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

Tudományos témavezető:
Dr. Fegyverneki Sándor

A doktori iskola vezetője:
Prof. Dr. Szigeti Jenő
A matematikai tudomány kandidátusa

Miskolc
2014

Bíráló Bizottság

Elnök:

Dr. habil Juhász Imre PhD, egyetemi tanár, Miskolci Egyetem

Tagok:

Dr. Rontó Miklós DSc, egyetemi tanár, Miskolci Egyetem
Dr. habil Galántai Aurél DSc, egyetemi tanár, Óbudai Egyetem
Dr. habil Ispány Márton PhD, egyetemi docens, Debreceni Egyetem

Titkár:

Dr. habil Kovács László PhD, egyetemi docens, Miskolci Egyetem
Tartalék:

Dr. Móri Tamás CSc, egyetemi docens, Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Dr. Raisz Péter PhD, ny. egyetemi docens, Miskolci Egyetem

A titkár ellátja a Bíráló Bizottsági feladatokat és egyben tag is.

Hivatalos bírálók:

Dr. Szeidl László DSc, egyetemi tanár, Óbudai Egyetem
Dr. Gáll József PhD, egyetemi docens, Debreceni Egyetem

Póttag:

Dr. Raisz Péter PhD, ny. egyetemi docens, Miskolci Egyetem

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**
1.1. A kutatás célja 4

2. A kutatáshoz felhasznált szakirodalom és módszerek **5**

3. Tudományos eredmények **7**
3.1. A PIT paraméterbecslési eljárás 7
3.2. A $\mathcal{B}$ függvények közelítésének meghatározása 10
3.3. Statisztikai vizsgálatok 10
3.4. A BÉT részvényeinek modellezése a PIT módszerrel 11
3.5. Informatikai eredmények 12

4 Theses **13**

A doktori értekezés témakörében született publikációk jegyzéke **14**

Irodalomjegyzék **14**

1. Bevezetés

A stabil eloszlások családját Levy [23] írta le független valószínűségi változók összegzéséből adódó változók határeloszlásait vizsgáló tanulmányában a XX. század elején. Az eloszláscsalád elnevezése onnan ered, hogy stabil valószínűségi változókat összegezve egy skálázó és egy centráló konstanstól eltekintve ismét stabil valószínűségi változót kapunk. A stabil eloszlások természetes általánosítását adják a normális eloszlásnak (mely önmaga is a stabil eloszláscsalád tagja) az általánosított centrális határeloszlás tétel alapján, melyben elhagyva az összegzendő változók létező véges szórására vonatkozó feltételt, határeloszlásként a stabil eloszláscsalád adódik. A tématerület legjelentősebb összefoglalói Gnedenko és Kolmogorov [15], Feller [14], Uchaikin és Zolotarev [34], Zolotarev [36], valamint Samorodnitsky és Taqqu [32]).

A stabil eloszlások használata természetes alternatívaként merül fel a normális eloszlás mellett olyan jelenségek vizsgálatára, amely nagy számú magas vagy akár végtelen szórásnégyzetű megfigyelés összegzéséből adódik. Ilyen feladat például a részvények árfolyamváltozásainak modellezése. Az árfolyamváltozásokból képzett hozamok eloszlásának tanulmányozására először a normális eloszlást alkalmazták, de az empirikus eredmények azt mutatták, hogy a hozamok eloszlásának farka vastagabb, azaz nagyobb valószínűséggel következnek be extrém kilengések az árfolyamokban, mint azt a normális eloszlás alapján várnánk, valamint a hozameloszlás csúcsosabb is. Ennek a jelenségnek a megragadására az 1960-as évektől egyre többen kezdték alkalmazni a stabil eloszlásokat (Mandelbrot [24], Fama [8], [9], [10]).

A stabil eloszlások pénzügyi modellezésben való alkalmazása mára széles körben elfogadottá vált a gyakorlati szakemberek számára (Adler, Feldman és Taqqu [1], Bradley és Taqqu [2], Rachev [30], Rachev és Mittnik [31]). Ezekben a problémákban a parametrikus modellek használatához elengedhetetlen, hogy a hozamok eloszlásának paramétereit megfelelő pontossággal, könnyen és egyszerűen használható statisztikai eszközökkel becsülhessük.

A számítógépek növekvő számítási kapacitásai, valamint az újabb és újabb algoritmusok révén valódi alternatívát jelenthet a stabil eloszláscsalád használata a normális eloszlással szemben. Ugyanakkor az eloszláscsalád használatát megnehezíti, hogy az általános stabil sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény nem ismert zárt alakban, a normális eloszlást kivéve nem létezik a szórásnégyzetük, és a magasabb rendű momentumaik is végtelenek. A sűrűség- és eloszlásfüggvény helyett a stabil eloszlások definiálására a karakterisztikus függvény használható, amely négy paraméterrel rendelkezik, ezek az α karakterisztikus kitevő, β aszimmetria vagy ferdeségi, γ skála-, és δ helyparaméter.

Mivel nem ismert a sűrűségfüggvény zárt alakban, a paraméterbecslésre leggyakrabban használt maximum likelihood módszer nem alkalmazható közvetlenül (Nolan [27]), illetve nagyon számításigényessé válik a numerikus integrálás miatt. A magasabb rendű momentumok végtelenek, ezért a momentumok módszere sem alkalmas a stabil paraméterek becslésére. Az említett jellemzők miatt az eloszláscsalád kezeléséhez speciális módszerekre van szükség.

1.1. A kutatás célja

Kutatásom célja olyan numerikus statisztikai eljárás kifejlesztése volt, amelynek segítségével a stabil eloszlások paraméterbecslési feladata nagy pontossággal, számítási igényt tekintve gyorsan és egyszerűen megoldható. A stabil eloszlásból származó minták paraméterbecsléséhez a fenti tulajdonságok miatt merőben új módszerekre van szükség. Az általam bemutatott paraméterbecslési eljárás a robusztus statisztikában használt M-becslések (maximum likelihood típusú becslések) közé tartozik. Az új eljárás a hely- és skálaparaméter együttes M-becslésén alapszik. A szakirodalomban ismert számos paraméterbecslési eljárással szemben az új módszer megbízható eredményt ad, gyors, és egyszerűen implementálható.

A bemutatott új paraméterbecslési módszer kiszámításához szükségesek bizonyos függvényértékeknek és konstansoknak az ismerete. A módszer alkalmazhatóságának biztosításához numerikus függvényközelítéseket határoztam meg. A racionális törtfüggvény approximáció együtthatóinak kiszámítása nagy számú stabil eloszlásból származó véletlenszám generálásán alapszik. A több, különböző fokszámú polinomokkal felírt közelítés előállításával, és ezek vizsgálatával a célom a legmegfelelőbb törtfüggvény közelítés kiválasztása volt.

A bemutatott új becslési módszer hatékonyságát, pontosságát, az egyes paraméterek becslései közötti összefüggést Monte-Carlo szimulációsorozat segítségével értékeltem. A vizsgálat célja az új módszer statisztikai tulajdonságainak összehasonlítása a szakirodalomban ismert módszerekkel, valamint a becslések aszimptotikus eloszlásának megismerése a statisztikai vizsgálat szimulációi során kapott becslésekből képzett minták egyváltozós, és együttes (többváltozós) normalitásának tesztelésével, különböző illeszkedésvizsgálat (normalitás) tesztekkel.

A kutatómunkám további célkitűzése volt hazai részvényárfolyamok vizsgálata az új módszer segítségével. Ennek oka egyrészt az új módszer használhatóságának bizonyítása, másrészt a 2008-2009-es pénzügyi válság hazai részvények árfolyamaira gyakorolt hatásának modellezése volt. Az elemzésben a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) legjelentősebb, vezető részvényeinek napi záróár árfolyamváltozásainak paramétereit becsültem a PIT módszerrel. A becsült paraméterek alapján illeszkedés vizsgálatot végeztem a becsült stabil eloszláshoz képest és a normális eloszláshoz képest Kolmogorov-Smirnov, valamint χ^2 tesztekkel. A paraméterek mozgóablakos, időbeni változásának vizsgálatával jól megfigyelhető a kockázatot jellemző paraméterek viselkedése a válság időszakában.

2. A kutatáshoz felhasznált szakirodalom és módszerek

1. Definíció. *Egy X valószínűségi változót stabilnak nevezünk, ha minden n-re léteznek olyan X_1, X_2, ... , X_n független valószínűségi változók, melyeknek közös az eloszlása, és amely eloszlás megegyezik X eloszlásával, továbbá léteznek olyan $e(n)$ és $a(n)$ konstansok, úgy hogy*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{a(n)} - e(n) \tag{1}$$

eloszlása megegyezik X eloszlásával.

A stabil eloszlások a karakterisztikus függvény segítéségével adhatók meg, mivel a sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény nem ismer zárt, analitikus formában. A karakterisztikus függvény négy paraméter segítségével ír le egy általános stabil eloszlást, ezek

- a $0 < \alpha \leq 2$ karakterisztikus kitevő (stabilitási index, farok index),
- a $-1 \leq \beta \leq 1$ ferdeségi (aszimmetria) paraméter
- a $\gamma > 0$ skálaparaméter
- a $\delta \in \mathbb{R}$ helyparaméter.

Legyen $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ stabil eloszlású valószínűségi változó a fenti paraméterekkel. Ekkor az X változó karakterisztikus függvénye:

$$E \exp(itX) = \begin{cases} \exp\left(-\gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2})(signt)((\gamma|t|)^{1-\alpha} - 1)\right] + i\delta t\right), & \alpha \neq 1, \\ \exp\left(-\gamma|t|\left[1 - i\beta\frac{2}{\pi}(signt)(\ln|t| + \ln\gamma)\right] + i\delta t\right), & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2}$$

A paraméterek becslésére a szakirodalomban számos megközelítés létezik. Az eloszlás farkának aszimptotikus Pareto tulajdonságára épülnek a farokindex becslések (Csörgő [4], Csörgő és Viharos [5], Hall [16], Hill [18], Szeidl [33], Viharos [35]), kvantiliseken alapuló becsléseket dolgozott ki Fama és Roll [11], [12] , illetve McCulloch [26], a sűrűségfüggvény numerikus Fast Fourier Transform algoritmussal történő integrálásán keresztül a Maximum likelihood módszert alkalmazza Nolan [27], a karakterisztikus függvényen alapuló becsléseket mutatott be Press [29], a karakterisztikus függvény segítségével definiált regressziós módszert mutatott be Koutrouvelis [22], majd a módszer javítását Kogon és Williams [21].

A bemutatott új becslési eljárás a robusztus statisztikában használt M-becslések közé tartozik. A robusztus statisztika legfontosabb eredményeit a Huber [19] és Hampel *et al.* [17] könyvek tartalmazzák. A magyar szakirodalomban Kerékfy [20] foglalta össze a cikk megjelenéséig (1978) elért eredményeket a témában. A doktori értekezésben áttekintettem a robusztus statisztika fontos fogalmait és eredményeit, amelyekre támaszkodtam az új módszer kidolgozásánál. Az M-becslésekkel kapcsolatos fontos eredmény, hogy aszimptotikusan normális eloszlásúak. A hely- és skálaparaméter együttes M-becslésének aszimptotikus eloszlásának kovariancia mátrixa szintén megadható (Hampel et al. [17], Fegyverneki [13]).

A becslési eljárás statisztikai jellemzőit Monte-Carlo szimuláció sorozattal vizsgáltam, melyhez elengedhetetlen, hogy adott paraméterű stabil eloszlású véletlen számokat generálhassunk. Egy általános stabil eloszlású véletlenszám generálására az eloszláscsalád XX. század elején történt definiálása után még hosszú ideig nem állt rendelkezésre megfelelő képlet. Az eloszlásfüggvény inverzén alapuló klasszikus módszer nem használható, mert hasonlóan az eloszlásfüggvényhez, annak inverze sem ismert zárt alakban. A problémára Chambers et al. [3] adtak 1976-ban először formulát. Ennek a formulának egy módosított változatát mutatta be Zolotarev [36]. Ez utóbbi formulát használtam a statisztikai vizsgálatokban véletlen számok generálására.

Dolgozatom alkalmazási példát bemutató eredményei a Budapesti Értéktőzsde (BÉT) legjelentősebb, vezető részvényeinek napi záróár változásainak modellezésével születtek. A vizsgált adatsorok a 2004.01.01. és 2012. 12. 31. közötti időszakot ölelik fel, az adatok forrása a *www.portfolio.hu* weboldal. A vizsgált részvények: OTP, Richter, Egis, Magyar Telekom, MOL, valamint a BUX Budapesti Értéktőzsde hivatalos indexe. A számításokhoz a saját programkódjaim mellett a STABLE programot is alkalmaztam, amely Nolan [28] stabil eloszlások ML módszerrel való paraméterbecslésére, a sűrűség és eloszlásfüggvény közelítésére, stb. kidolgozott, szabadon letölthető szoftvere. A hozamokat a logaritmikus és a százalékban kifejezett hozam modellekkel is meghatároztam, ezek között lényeges eltérés nem volt megfigyelhető.

Az eredmények bemutatásához számos jól ismert statisztikai eszközt használtam fel. A becsült paraméterek alapján illeszkedés vizsgálatot végeztem a becsült stabil eloszláshoz képest és a normális eloszláshoz képest Kolmogorov-Smirnov, valamint χ^2 goodness-of-fit tesztekkel. A hipotézisvizsgálatok eredményeit, azaz a döntéseket a hipotézis elvetéséről vagy elfogadásáról, a p-értékeit és a tesztstatisztika értékeket táblázatokban közöltem.

A logaritmikus hozamok eloszlásának vizsgálatához gyakorisági hisztogramon ábrázoltam a hozam adatokat. A hozamok empirikus eloszlásfüggvényét a normális eloszláshoz, illetve a becsült α paraméterű stabil eloszláshoz illesztve ún. q-q ábrán mutattam be. A mintának a becsült stabil paraméterű eloszláshoz való illeszkedését Kolmogorov-Smirnov próbával és χ^2 tesztekkel értékeltem. A paraméterek időbeni változásának megfigyelésére változtatható méretű mozgóablakot készítettem, és együttesen ábrázoltam, hogyan változtak a paraméterek a vizsgált időperiódusban. Ezzel a módszerrel elkülöníthetők a kockázatos (volatilis) és kevésbé kockázatos időszakok egymástól.

3. Tudományos eredmények

3.1. A PIT paraméterbecslési eljárás

Legyenek a megfigyeléseink $x_1, x_2, ...x_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek az F eloszlásból származnak. Legyen

$$F_0((x - T)/S) = F(x),$$

azaz F és F_0 azonos típusú, F_0 az eloszlástípus kitüntetett tagja, és az S skála és T helyparamétert F_0-hoz képest definiáljuk. A hely- és a skálaparaméter (T, S) együttes M-becslése (T_n, S_n) a következő egyenletrendszer megoldása:

$$\sum \psi\Big(\frac{x_i - T_n}{S_n}\Big) = 0, \tag{3}$$

$$\sum \chi\Big(\frac{x_i - T_n}{S_n}\Big) = 0, \tag{4}$$

ahol a T_n a helyparaméter, S_n a skálaparaméter aktuális becslése, ψ és χ alkalmas súlyfüggvények, x_i jelöli a minta elemeket. A ψ és χ súlyfüggvények megválasztása más-más becslést eredményez.

Alkalmazzuk a Probability Integral Transformation (PIT) technikát és a momentumok módszerét a ψ és χ függvények meghatározásához. Jól ismert, hogy ha egy ξ valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye invertálható, akkor az $F(\xi)$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0, 1]$ intervallumon. Alkalmazzuk a momentumok módszerét a transzformált egyenletes valószínűségi változóra:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F dF = \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(F - \frac{1}{2}\right)^2 dF = \frac{1}{12}. \tag{6}$$

Rendezzük át az egyenleteket és használjuk a várható érték és szórásnégyzet helyett az átlagot. A T és S paraméterek együttes M-becslését definiáló implicit függvények ekkor:

$$\sum \psi\Big(\frac{x_i - T_n}{S_n}\Big) = 0, \tag{7}$$

$$\sum \psi^2\Big(\frac{x_i - T_n}{S_n}\Big) = (n - 1)\mathcal{B}, \tag{8}$$

ahol $\mathcal{B}$ egy konstanst jelöl. Ha a mintaelemek valódi eloszlása éppen F_0, akkor $\mathcal{B}$ értéke éppen $1/12$. Ha nem ξ-nek megfelelő eloszlástípust használunk, azaz a mintaelemek eloszlása nem az F_0 típus, akkor

$$\mathcal{B} = D^2_{F_\xi}(\psi(\xi)) \tag{9}$$

-ként áll elő.

Az (7) és (8) egyenletrendszer iteratív algoritmussal, az ún. ping-pong módszerrel oldható meg. A módszer numerikus viselkedése, konvergenciája megtalálható Dutter és Huber [7] dolgozatában. A módosított Newton módszer alapján az alábbi két egyenletet felváltva oldjuk meg: az első egyenletből kapott helyparamétert a második egyenletbe helyettesítve új skálaparaméter értékhez jutunk. Ezt a skálaparaméter becslést felhasználva ismét az első egyenletet számítjuk ki. A kívánt pontosság eléréséig ismételjük a lépéseket.

A helyparaméter közelítése:

$$T_n^{(m+1)} = T_n^{(m)} + \frac{1}{n} S_n^{(m)} \sum_{i=1}^{n} \psi\Big(\frac{x_i - T_n^{(m)}}{S_n^{(m)}}\Big), \tag{10}$$

A skálaparaméter közelítése:

$$[S_n^{(m+1)}]^2 = \frac{1}{(n-1)\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{n} \psi^2\Big(\frac{x_i - T_n^{(m+1)}}{S_n^{(m)}}\Big)[S_n^{(m)}]^2. \tag{11}$$

A ψ súlyfüggvény

$$\psi(x) = F_0(x) - \frac{1}{2},$$

a kezdeti értékek

$$T_n^{(0)} = med\{x_i\}, \tag{12}$$

$$S_n^{(0)} = C \cdot MAD, \tag{13}$$

$med\{x_i\}$ jelöli a mediánt, MAD jelöli a medián abszolút eltérést

$$MAD = med\{|x_i - med\{x_i\}|\},$$

valamint $S_n^{(m)}$ és $T_n^{(m)}$ az S skála- és T helyparaméter aktuális becslései az m-edik iterációban. A C konstans értéke

$$C = F_0^{-1}(3/4),$$

amelyet a kezdeti becslés torzítatlansága miatt alkalmazunk (F_0 szimmetrikus eloszlás).

Ismert eloszlástípus esetén, azaz ha F_0 eloszlás ismert, akkor a ping-pong módszer segítségével a hely- és skálaparaméter együttesen becsülhető. Ebben az esetben a becslések együttes eloszlása aszimptotikusan normális, és a kovariancia mátrix megadható, Fegyverneki [13]. Legyen $\xi = S\eta + T$, ahol az η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $G_0(x)$. Legyen adott az $\xi_1, \xi_2, \cdots$ minta és G_0 eloszlástípus, ξ_i valószínűségi változó eloszlása $G_0((x - T)/S)$.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy G_0 differenciálható, szigorúan monoton növekvő és $G_0(0) = 0.5$. Ekkor T_n és S_n jól definiáltak, azaz az (7), (8) egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása, amelyre $S_n > 0$.*

2. Tétel. *A PIT becslések a 1. Tétel feltételeinek teljesülése esetén B-robusztusak, V-robusztusak, kvalitatív robusztusak és a katasztrófapontjaik*

$$\varepsilon^*(T_n) = \frac{\delta}{1+\delta} = 0.5, \qquad \textit{ahol} \qquad \delta = \min\left\{-\frac{\psi(-\infty)}{\psi(+\infty)}, -\frac{\psi(+\infty)}{\psi(-\infty)}\right\}$$

és

$$\varepsilon^*(S_n) = \frac{-\chi(0)}{\chi(-\infty) - \chi(0)} = \frac{1}{3}.$$

A stabil paraméterek PIT becslésének torzítatlansága következik Hampel *et al.* [17] eredményeiből felhasználva Fegyverneki [13] dolgozatát.

Ha a stabil alakparamétert is a mintából becsüljük, akkor $F_{0,\alpha}$ eloszlástípus nem ismert. A becslési eljárásban az $F_{0,\alpha}$ eloszlásra a ψ függvény, és a $\mathcal{B}$ érték számításakor van szükség. Mivel az $F_{0,\alpha}$ nem ismert, a javasolt új módszer szerint használjuk a skálaparaméter meghatározásához a stabil eloszlások családjának két ismert szimmetrikus tagját, a normális eloszlást ($\alpha = 2$), és a Cauchy eloszlást ($\alpha = 1$) az ismeretlen $F_{0,\alpha}$ helyett a ψ függvényben.

Helyettesítsük be egyenként a két ismert eloszlásfüggvényt, $\Phi(x)$-t és

$$F_{Cauchy} = 1/\pi \text{arctg} x + 1/2,$$

a Cauchy eloszlásfüggvényt a $\psi(x) = F_0(x) - 0.5$ súlyfüggvénybe. A két F_0 eloszlásfüggvény használatával két különböző $\mathcal{B}$ függvényhez jutunk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}x\right)^2 dF_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}x\right)^2 f_\alpha(x)dx = \mathcal{B}_1(\alpha), \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2 dF_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)^2 f_\alpha(x)dx = \mathcal{B}_2(\alpha), \tag{15}$$

ahol F_α és f_α jelöli az α-stabil minta eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Nemcsak az iteráció súlyfüggvényeinek számításánál, hanem a $\mathcal{B}$ értékének meghatározásához is szükséges a ψ függvényben az $F_{0,\alpha}$ helyettesítése. A $\mathcal{B}$ értéke továbbá függ a minta α paraméterétől az integrandus miatt, ezért $\mathcal{B}(\alpha)$ a továbbiakban az α paraméter függvénye.

Jelöljük a Cauchy és normális eloszlásfüggvény behelyettesítésével kapott függvényeket $\mathcal{B}_1(\alpha)$ -val és $\mathcal{B}_2(\alpha)$-val. Jelöljük továbbá a $\mathcal{B}_1(\alpha)$ és $\mathcal{B}_2(\alpha)$ függvények használatával (11) egyenlet szerint számított skálaparaméter becsléseket $S_1(\alpha)$-val és $S_2(\alpha)$-val. A skálaparaméter becslések a $\mathcal{B}$ függvényeken keresztül szintén függenek az alakparamétertől.

Ha egy rögzített minta esetén a mintának megfelelő α paraméterű $F_\alpha - t$ használjuk a ψ függvényben, akkor a ping-pong módszer megadja a skálaparaméter torzítatlan becslését. Ha F_0-ként nem a megfelelő stabil eloszlásfüggvényt használjuk, de az integrandusban szereplő f_α sűrűségfüggvény megfelelő, akkor is megkapjuk a torzítatlan becslését a skálaparaméternek. Tehát, ha nem a megfelelő $F_{0,\alpha}$ -t használjuk $\mathcal{B}$-ben, akkor az $S_1(a)$ és $S_2(a)$ skálaparaméter becslések minden $a \in [1, 2]$-ra el fognak térni (torzítottak lesznek), kivéve a minta keresett α paraméterénél, amelyet jelöljünk $\hat{\alpha}$ -val. A $\hat{\alpha}$ pontban a skálaparaméter becslések a két eloszlásfüggvény használatával megegyeznek, azaz $S_1(\hat{\alpha}) = S_2(\hat{\alpha})$.

Az α alakparaméter becslését az az $a \in [1, 2]$ jelenti, amely pontban a két $S_1(a)$ és $S_2(a)$ skálaparaméter becslés megegyezik. Ha a skálaparaméter becsléseket α függvényének tekintjük az $[1, 2]$ intervallumon, akkor a skálaparaméter függvények két monoton növekvő, konkáv görbét alkotnak, amelyeknek csak egy metszéspontja létezik, a keresett $\hat{\alpha}$.

Algoritmus

1. Az ϵ pontosság beállítása.
2. Inicializálás: $a_0 = a_L = 1$ és $a_1 = a_U = 2$
3. A $S_1(a_L)$, $S_2(a_L)$, $S_1(a_U)$, $S_2(a_U)$ kezdeti becslések kiszámítása.
4. Kezdeti feltétel ellenőrzése: ha $S_1(a_L) < S_2(a_L)$ és $S_2(a_U) < S_1(a_U)$ akkor van metszéspont, egyébként az algoritmus nem ad becslést α-ra (kilépés -1).
5. While $|a_{i-1} - a_i| > \epsilon$

   $a_i := (a_U + a_L)/2$, $S_1(a_i)$ és $S_2(a_i)$ kiszámítása.

   Ha $S_1(a_i) < S_2(a_i)$, akkor $a_L := a_i$, egyébként $a_U := a_i$.

6. $\hat{\alpha} := a_i$

7. $\hat{\gamma} := (S_1(a_i) + S_2(a_i)/2)$ és $\hat{\delta} := (T_{1,i} + T_{2,i})/2$

1. TÉZIS. ***Ismert α alakparaméterű eloszlástípus esetén az M-becslés használható a stabil eloszlások hely- és skálaparaméterének becslésére. Ha más alakparaméternek megfelelő $F_{0,\alpha}$ eloszlásfüggvényt választunk a súlyfüggvényben, a segítségével meghatározott $\mathcal{B}$ érték felhasználásával a hely- és skálaparaméter torzítatlan becslését adjuk ($1 \leq \alpha \leq 2$).***

2. TÉZIS. ***Ha az alakparaméter sem ismert, akkor a Cauchy és a normális eloszlás alapján a becsült skálaparaméterek összehasonlításával megadható az alakparaméter becslése és így a szimmetrikus stabil eloszlás alak-, hely- és skálaparamétere egyszerre becsülhető.***

A téziseket a [S1] publikáció eredményei alapján állítottam fel.

3.2. A $\mathcal{B}$ függvények közelítésének meghatározása

A becslések kiszámításához szükséges a $\mathcal{B}$ függvények értékének megfelelő pontosságú ismerete tetszőleges $1 \leq \alpha \leq 2$ pontban. A közelítést két lépésben határoztam meg. Először a függvények kiválasztott alappontokban felvett értékeit közelítettem véletlen minták segítségével, majd a függvényértékekre támaszkodva meghatároztam különböző racionális törtfüggvényeket. Az alappontokat és a törtfüggvény közelítés fokszámát magam választottam ki. A törtfüggvények közül a 1. táblázatban közölt törtfüggvény bizonyult a legjobbnak.

1. táblázat. A $\mathcal{B}_1$ és $\mathcal{B}_2$ legmegfelelőbb racionális törtfüggvény közelítésének együtthatói

Együtthatók	$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_2$
a_3	0.00343013	0.00631315
a_2	0.00605670	0.01943904
a_1	0.04709978	0.09332481
a_0	0.00972618	0.01619877
b_1	-0.38087590	-0.09345095
b_0	0.17663917	0.16029569

A $\mathcal{B}$ függvények törtfüggvényes közelítésének meghatározása jelentős számítási munkával járt. Az egyes részfeladatok elvégzése, például az alappontokban érvényes függvényértékek meghatározása a milliárdos nagyságrendű véletlenszám generálás miatt alappontonként önmagában több órát vett igénybe. Ugyanakkor, a közelítések meghatározása révén az algoritmus implementálhatósága, használhatósága jelentősen egyszerűsödött. A törtfüggvény közelítés használata egyszerű felhasználó számára is lehetővé teszi a becslési eljárás alkalmazását.

A törtfüggvény közelítés használatával a PIT becslési eljárás gyorsítható és egyszerűsíthető, mivel nem szükséges az egyébként zárt alakban ismeretlen stabil sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény közvetlen, numerikus integrálással történő számítása futási időben.

3.3. Statisztikai vizsgálatok

A PIT becslési eljárás statisztikai jellemzőinek vizsgálatára Monte-Carlo szimulációkból álló szimuláció sorozatot végeztem. A szimulációkban rögzített α paraméterű, standardizált véletlen mintákat generáltam, és becsültem a PIT módszerrel a paramétereket. A következő vizsgálatokat végeztem el a becslések mintáira:

- leíró statisztika: átlag, szórás, minimum, maximum
- korrelációs együtthatók, kovariancia mátrixok
- MSE értékek (mean squared error)
- érvényes becslések számának meghatározása
- egyváltozós normalitás tesztek paraméterenként - χ^2 próba, Kolmogorov-Smirnov próba, Sarkadi próba
- konfidencia intervallumok meghatározása paraméterenként
- a többváltozós normalitás tesztelésére
  - Mardia-féle többváltozós ferdeség és lapultság mutató [25] kiszámítása
  - többváltozós omnibus teszt Doornik és Hansen [6] alapján.

A tesztek megerősítették a hely- és skálaparaméter becslésének normalitására vonatkozó elméleti eredményeket. Az alakparaméter normalitása a legtöbb szimulációban elfogadható, de a kis mintás, magas ismétlésszámú esetekben a normalitást el kellett vetnem. A többváltozós normalitás tesztek eredményei alapján a három paraméter együttes normalitása nem jelenthető ki egyértelműen, javarészt azokban a szimulációkban fogadható el, ahol az egyváltozós normalitásokat elfogadhattuk.

A PIT becslési eljárást összehasonlítottam a Weron [37] által vizsgált ismert módszerekkel. Összességében azt az eredményt kaptam, hogy a módszer pontossága, megbízhatósága a performancia jellemzők alapján nem tér el ezektől a módszerektől.

3.4. A BÉT részvényeinek modellezése a PIT módszerrel

Meghatároztam a PIT becsléssel a minták alak-, hely- és skálaparaméter becsléseit a szimmetria feltételezése mellett. Az eredmények szerint az OTP és az Egis valamivel kockázatosabbnak bizonyult, a Richter, Mol és M. Telekom papírjai egy kicsivel stabilabbak, kevésbé kockázatosak. A skálaparaméter értéke az OTP esetében a legmagasabb, ami arra utal, hogy a vizsgált papírok közül az OTP-re volt legnagyobb hatása a pénzügyi válságnak.

A hely- és skálaparaméternek kiszámíthatók a robusztus becslései úgy, mint a medián és a medián abszolút eltérés (Median Absolute Deviation, MAD), illetve a normális modellből kiindulva megbecsülhető az átlag és szórás is. Az OTP és Egis részvényekre a magas skálaparaméter érték mellett magas szórást és MAD értéket kaptam, ami összhangban van az alacsonyabb α paraméterrel. Valamint az alakparaméter alapján stabilabb, kevésbé kockázatos Richternél és M. Telekomnál a szórás és MAD is alacsonyabban alakult. A medián három részvénynél (Egis, Mol, M. Telekom) is nulla lett és a többi esetben is nagyon közeli a nullához, így a STABLE program β becslésével is összevetve a szimmetria mellett szóló eredményt kaptam.

A mintának a becsült stabil paraméterű eloszláshoz való illeszkedését Kolmogorov-Smirnov próbával és χ^2 goodness-of-fit tesztekkel értékeltem. A χ^2 tesztek alapján azt mondhatjuk, hogy a stabil modellt több részvény esetében elfogadhatónak értékelték a tesztek, míg a normalitást egyértelműen el kell utasítanunk. A Kolmogorov-Smirnov próbák eredményeiből kitűnik, hogy a hipotetikus α-stabil eloszlásoktól való eltérés minden esetben kisebb, mint a normális eloszlástól való eltérés, és a teszt csak egy esetben (MTelekom) utasította el a stabil nullhipotézist.

3. TÉZIS. ***A PIT becslési eljárás alkalmazható valós adatok elemzésére. A Budapesti Értéktőzsde kiválasztott részvényei logaritmikus hozameloszlásának paraméterbecslése alapján megállapítottam, hogy a becsült paraméterekkel rendelkező stabil eloszlás jobban illeszkedik a hozamadatokra, mint a normális eloszlás. A paraméterek időbeni változását elemezve megállapítottam, hogy a becsült alak- és skálaparaméterek jól tükrözik az egyes részvények kockázatosságának alakulását, amely a 2008-2009-es pénzügyi válság hatására jelentősen megnövekedett ebben az időszakban.***

A téziseket a [S3] publikáció eredményei alapján állítottam fel.

3.5. Informatikai eredmények

Az elkészült programok mindegyike MATLAB függvény (.m fájl), amelyek egymáshoz csak lazán kapcsolódnak, azok tetszőlegesen csoportokba (mappákba) szervezhetőek. Az elkészült programokat MATLAB fájlokként (.m fájlok) dolgozatomhoz mellékeltem.

Az első csoport a PIT eljárást kiszámító függvények csoportja, tehát azok a függvények, amelyek a becslés értékek meghatározásában közvetlenül részt vesznek.

A második csoport a segédfüggvények – az előzőnél sokkal nagyobb – csoportja, amelyben minden más elkészült függvényt összegyűjtöttem. Ezek a függvények lehetővé tették az algoritmus gyorsítását és az implementáció megkönnyítését célzó törtfüggvényes közelítés meghatározását. A segédfüggvények csoportja tartalmazza a stabil eloszlású egyváltozós és többváltozós véletlen számok generálásához készített függvényeket. Ide sorolhatók a PIT módszer megbízhatóságának, pontosságának, és a becslés aszimptotikus normalitásának teszteléséhez elvégzett statisztikai vizsgálatokhoz készített programkódok. Valamint a segédfüggvények között áttekintem a BUX adatsorok elemzéséhez írt automatizált elemző szkripteket is.

4. TÉZIS. ***Elkészítettem a PIT paraméterbecslési módszert megvalósító MATLAB függvényeket, valamint a módszer tesztelését, szimulációkkal történő statisztikai vizsgálatát, és valós adatsorokra való alkalmazásának lehetőségét megteremtő programkódokat, segédfüggvényeket. A módszer hatékonyságának, megbízhatóságának elemzésével megmutattam, hogy az eljárás hasonló performancia tulajdonságokkal rendelkezik, mint a szakirodalomban ismert módszerek. A paraméter becslések különkülön egyváltozós és együttes normalitását szimulációval vizsgáltam.***

A téziseket a [S2] publikáció eredményei alapján állítottam fel.

4 Theses

THESIS 1 ***The M-estimator can be used to estimate stable parameters scale and location if the α-stable distribution type is known. If the chosen distribution type $F_{0,\alpha}$ in the weight function is not the one that coincides the sample's α-stable distribution then a predetermined value $\mathcal{B}$ that is derived from the chosen $F_{0,\alpha}$ distribution is used to give an unbiased estimator of scale and location parameter ($1 \leq \alpha \leq 2$).***

THESIS 2 ***If the shape parameter α is not known but is also to be estimated from the sample, then by comparing scale estimators calculated by considering the normal and the Cauchy distribution as $F_(0, \alpha)$, the three parameters of a symmetric stable distribution can be simultaneously estimated.***

THESIS 3 ***The PIT parameter estimation method can be applied for modelling real data sets. By investigating the parameters of logarithmic returns of some assets at Budapest Stock Exchange with PIT method, I have stated that a stable distribution with the estimated parameters fits better to the modelled data set than the normal distribution. By analysing alteration of the parameters in time, I have identified the effects of the world financial crisis in 2008-2009 to the returns and the volatility (risk) of the assets which had a remarkable increase in that time period.***

THESIS 4 ***I have implemented the algorithms that can calculate the PIT estimators of a data set. Moreover, I have written program codes that are used to test accuracy and performance of the new method, accomplish statistical investigation of the method via simulation. Auxiliary MATLAB functions were created to facilitate the application of the PIT method to real financial data. By analysing efficiency and reliability of the PIT method I have proved that the presented new method has similar performance properties as the existing methods. The univariate and multivariate normality of the estimators of the three parameters has been also investigated by a simulation study.***

A doktori értekezés témakörében született publikációk jegyzéke

Nemzetközi, lektorált folyóirat

[S1] Csendes, Cs., Joint Robust Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions. *Journal of Statistical and Econometric Methods* **2** (2013) 85–106

Nemzetközi, lektorált könyvfejezet

[S2] Csendes, Cs., Fegyverneki, S., Parameter Estimation for Symmetric Stable Distributions by Probability Integral Transformation. *Applied Information Science, Engineering and Technology, Topics in Intelligent Engineering and Informatics* **7** (2014) 1–18
DOI : 10.1007/978 − 3 − 319 − 01919 − 2

Hazai lektorált folyóirat

[S3] Árfolyamingadozások vizsgálata szimmetrikus stabil modellben, *Szigma*, **XLV** 3-4. 1–26 (várható megjelenés: 2015)

Konferenciakiadvány

[S4] Csendes, Cs., Fegyverneki, S.: Parameter Estimation to the Stable Portfolio Analysis, *Proceedings of XXIII. microCAD International Scientific Conference, Sec. G, Miskolc, Hungary*, (2009) 1–8.

[S5] Csendes, Cs.: Random Number Generation to Multivariate Stable Distributions, *Proceedings of Spring Wind International Conference, Pécs, Hungary*, (2010) 79–85.

[S6] Csendes, Cs.: Random Number Generation to Multivariate Stable Distributions, *Proceedings of XXIV. microCAD International Scientific Conference, Sec. G, Miskolc, Hungary*, (2010) 7–13.

[S7] Csendes, Cs.: Parameter Estimation and Random Number Generation to Stable Distributions, *Proceedings of 8th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary*, (2010) 239–246.

[S8] Csendes, Cs.: Normality Testing on PT Estimation of Parameters of Stable Distributions, *Proceedings of International Conference of Ph.D. Students, Miskolc, Hungary*, (2010) 35–40.

[S9] Csendes, Cs.: Multivariate Normality Testing, *Proceedings of XXV. microCAD International Scientific Conference, Sec. G, Miskolc, Hungary*, March (2011) 13–18.

[S10] Csendes Cs.: Parameter Estimation and Hypothesis Testing to Stable Distributions, *Proceedings of 17th European Young Statisticians Meeting, Lisbon, Portugal*, (2011) 69–73.

[S11] Csendes Cs.: A Simulation Study about Stable Distributions, *Proceedings of XXVI. microCAD International Scientific Conference, Miskolc, Hungary*, March (2012)

Egyéb publikációk

[S12] Csendes, Cs.: Stabil portfólió analízis, Tudományos Diákköri Dolgozat, (2008) 59 p.

[S13] Csendes, Cs.: Többváltozós stabil eloszlású véletlen számok generálása, *Doktoranduszok Fóruma Kiadvány*, Miskolci Egyetem (2009)

[S14] Csendes, Cs.: Normality Testing on PT Estimation of Parameters of Stable Distributions, *Doktoranduszok Fóruma Kiadvány*, Miskolci Egyetem, (2010)

Irodalomjegyzék

[1] Adler, J. R., Feldman, R. E., Taqqu, M. S., (Editors), *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications*, Birkhauser, Boston (1998)

[2] Bradley, B. O., Taqqu, M. S., *Financial Risk and Heavy Tails*, in Hadbook of Heavy-tailed Distributions in Finance, (ed. Rachev, S. T.), North-holland (2003) 35–103

[3] Chambers, J. M., Mallows, C. L., Stuck, B. W., A method for simulating stable random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **71** (1976) 340–344

[4] Csörgő, S., Adaptive Estimation of the Parameters of Stable Laws. *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai*, **36**. Limit Theorems in Probability and Statistics (szerk. Révész P.), North-Holland, Amsterdam (1984) 305–368

[5] Csörgő, S. , Viharos, L., *Estimating the Tail Index*, in: Asymptotic Methods in Probability and Statistics (ed. Szyszkowicz, B.), Elsevier Science, North-Holland (1998) 833–881

[6] Doornik, J.A., Hansen, H., An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality. *Nuffield Economics Working Papers*, (1994)

[7] Dutter R., Huber, P. J., Numerical Methods for the Nonlinear Robust Regression Problem. *J. satist. comput. simul.*, **13** (1981) 79–113

[8] Fama, E. F., Portfolio Analysis in Stable Paretian Markets. *Management Science*, **11**(3) (1965) 404–419

[9] Fama, E. F., The Behavior of Stock-Market Prices. *Journal of Business*, **38**(1) (1965) 34–105

[10] Fama, E. F., Risk, Return, and Equilibrium. *Journal of Political Economy*, **79**(1) (1971) 30–55

[11] Fama, E. F., Roll, R., Parameter Estimates of Symmetric Stable Distributions. *J. Amer. Statis. Assoc.*, **66** (1971) 331–338

[12] Fama, E. F., Roll, R., Some Properties of Symmetric Stable Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **63** (1968) 817–836

[13] Fegyverneki, S., Robust Estimators and Probability Integral Transformations. *Math. Comput. Modelling*, **38** (2003) 803–814

[14] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. II.* Wiley, New York (1966)

[15] B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.*, Akadémiai kiadó (1951)

[16] Hall, P., On some simple estimates of an exponent of regular variation. *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser. B, **44** (1982) 37–42

[17] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., Stahel, W. A., *Robust Statistics - The Approach Based on Influence Functions*, Wiley, New York (1986)

[18] Hill, B. M., A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution. *Ann. Stat.*, **3** (1975) 1163–1174

[19] Huber, P. J., *Robust Statistics.* Wiley, New York (1981)

[20] Kerékfy, P., A robusztus becslésekről. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, **4** (1978) 327–357

[21] Kogon, S. M., Williams, D. B. *Characteristic function based estimation of stable parameters*, in Adler, R., Feldman, R., Taqqu, M., (eds.), A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications, Birkhauser, Boston (1998) 311–335

[22] Koutrouvelis, I. A., Regression-type Estimation of the Parameters of Stable Laws. *J. Amer. Statis. Assoc.*, **75** (1980) 918–928

[23] Levy, P., *Calcul des Probabilités.* Gauthier-Villars, Paris (1925)

[24] Mandelbrot, B., The Variation of Certain Speculative Prices. *The Random Character of Stock Market Prices* (ed. Cootner, P. H.), Cambridge, The M.I.T. Press (1964)

[25] Mardia, K. V., Tests of Univariate and Multivariate Normality. *Handbook of Statistics*, North-Holland (1980) 279–320

[26] McCulloch, J. H., Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters. *Commun. Statist. - Simula.*, **15**(4) (1986) 1109–1136

[27] Nolan, J. P., Maximum Likelihood Estimation of Stable Parameters in Barndorff-Nielsen, O. E. , Mikosch, T., and Resnick, S. I., (eds.), *Levy Processes: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston (2001) 379–400

[28] Nolan, J. P., stabil eloszlásokkal foglalkozó weboldal: http://academic2.american.edu/ jpnolan/stable/stable.html

[29] Press, S. J., *Applied Multivariate Analysis.* Holt, Rinehart and Winston, New York (1972)

[30] Rachev, S. T. (ed.), *Handbook of Heavy-tailed Distributions in Finance.* North-Holland, Amsterdam (2003)

[31] Rachev, S. T., Mittnik, S., *Stable Paretian Models in Finance.* Wiley, New York (2000)

[32] Samorodnitsky, G., Taqqu, M., *Stable Non-Gaussian Random Processes.* Chapman and Hall, New York (1994)

[33] Szeidl, L., Non-normal Limit Theorem for a New Tail Index Estimation. *Annales Univ. Sci. Budapest.* Sect. Comp. , **24**, (2004) 307–322

[34] Uchaikin, V. V., Zolotarev, V. M., *Chance and Stability - Stable Distributions and their Applications*, VSP, Utrecht (1999)

[35] Viharos, L., Tail index estimation based on linear combinations of intermediate order statistics. *Statistica Neerlandica*, **51** (1997) 164?-177

[36] Zolotarev, V. M., *One-dimensional Stable Distributions*, Translations of Mathematical Monographs, **65**, American Mathematical Society, Providence (1986)

[37] Weron, R., Performance of the Estimators of Stable Law Parameters. Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods, *Research Report HSC/95/1* (1995)