

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

NEWTONI ÉS NEM-NEWTONI FOLYADÉKOK HATÁRRÉTEG PROBLÉMÁINAK NUMERIKUS ÉS ANALITIKUS VIZSGÁLATA SÍKFELÜLETEN

PhD értekezés

Készítette:

Hriczó Krisztián

okleveles mérnök-informatikus

HATVANY JÓZSEF INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

Doktori iskola vezető:

Prof. Dr. Szigeti Jenő

A MATEMATIKAI TUDOMÁNY KANDIDÁTUSA

Tudományos vezető:

Vadászné Prof. Dr. Bognár Gabriella

AZ MTA DOKTORA

Miskolc

2014

DOI:

Köszönetnyilvánítás A kutatás az Európai Unió és Magyarország támogatásával a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program” című kiemelt projekt keretei között valósult meg.

NYILATKOZAT

Alulírott Hriczó Krisztián kijelentem, hogy ezt a doktori értekezést magam készítettem, és abban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, amelyet szó szerinti vagy azonos tartalomban, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Miskolc, 2014. november 10.

Hriczó Krisztián

TÉMAVEZETŐI AJÁNLÁS

Hriczó Krisztián: "Newtoni és nem-newtoni folyadékok határréteg problémáinak numerikus és analitikus vizsgálata síkfelületen" című PhD értekezéséhez

Hriczó Krisztián 2010-ben kezdte el vizsgálni a folyadékmechanika néhány jellegzetes feladatából származtatott nemlineáris differenciálegyenletek numerikus és analitikus megoldásait, nevezetesen a perem- illetve a kezdetiérték problémák megoldásait és a közelítő megoldások előállítását. A 2010 és 2014 közötti időszakban, ebben a témakörben végzett kutatásairól 6 folyóirat cikk jelent meg; konferenciákon tartott előadásai alapján pedig 14 dolgozat konferencia kiadványban került publikálásra. A folyóiratcikkek közül 2 magyar és 3 nemzetközi a SCOPUS adatbázisban nyilvántartott folyóiratban jelent meg; a dolgozatok közül kettő impakt faktorral rendelkező folyóiratban került közlésre; az impakt faktorok összege: 1,8. A folyóiratcikkekre eddig 3, illetve konferenciaközleményre 1 független külföldi hivatkozás ismert.

Az értekezés az elmúlt évek sikeres publikációs tevékenysége alapján készült. Hriczó Krisztián négy témával foglalkozik: lejtőn lefelé történő áramlással, a Marangoni-jelenség vizsgálatával vízszintes síklapon, az áramlási jellemzők meghatározásával vízszintes mozgó áteresztő síklapon és függőleges porózus közegbe helyezett síklap mentén, amelyek közül az utóbbi három esetben a hasonlósági módszert alkalmazza a numerikus megoldások előállításához. A matematikai modellben szereplő paraméterek hatását elemzi a dimenziómentes sebesség és hőmérséklet eloszlásokra.

Az értekezés Hriczó Krisztián önálló eredményeit tartalmazza és a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola szabályzatában megkövetelt követelményeknek mindenben megfelel. A fentiek alapján a jelölt számára a PhD cím odaítélését messzemenően támogatom.

Miskolc, 2014. november 8.

Vadászné dr. Bognár Gabriella
tudományos vezető

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Az értekezés 2010-ben kezdett kutatómunkám eredményeit foglalja össze, melyet a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola keretein belül végeztem, a Miskolci Egyetem Analízis Intézeti Tanszékén.

Először szeretnék köszönetet mondani tudományos vezetőmnek, Vadászné Prof. Dr. Bognár Gabriellának, aki már egyetemi hallgató koromban megismertetett a differenciálegyenletek elméletével tudományos diákköri munkám során és kutatómunkám irányítását készséggel vállalta doktoranduszi tanulmányaim alatt. Tanulmányaim és kutatómunkám során számtalan szakmai és baráti tanáccsal látott el, melyek segítettek a kitűzött cél elérésében. Szakmai tudásának átadásával járult hozzá, hogy ez az értekezés elkészülhessen.

Szeretném megköszönni Tóth Tibor Professzor Úrnak, a Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola előző vezetőjének a doktori iskola szemináriumain és fórumain adott bölcs tanácsait és támogató szavait, melyek aktívan hozzájárultak tudományos fejlődésemhez.

Hálásan köszönöm a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetében dolgozó kollégáim segítőkészségét, türelmét és megértését, amellyel támogattak disszertációm elkészítése során. Külön köszönet Rontó Miklós Professzor Úrnak szakmai tanácsaiért, amelyekkel ösztönözte kutatómunkám folytatását.

Szüleimnek köszönöm a belém vetett hitüket és az értem hozott áldozataikat, amellyel lehetővé tették egyetemi tanulmányaimat.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm barátaimnak, hogy végig melletttem álltak, mindenben segítettek és lelkesen biztattak.

TARTALOMJEGYZÉK

Nyilatkozat	2
Témavezetői ajánlás	3
Köszönetnyilvánítás	4
1. BEVEZETÉS	7
2. ÁRAMLÁS LEJTŐN	11
2.1. BEVEZETÉS	11
2.2. A FOLYAMATOT LEÍRÓ EGYENLETEK	12
2.3. ÁRAMLÁS NEWTONI FOLYADÉKOK ESETÉN	14
2.4. ÁRAMLÁS NEM-NEWTONI FOLYADÉKOK ESETÉN	14
2.5. SEBESSÉGELOSZLÁS MEGHATÁROZÁSA	15
3. MARANGONI-HATÁS VIZSGÁLATA	20
3.1. BEVEZETÉS	20
3.2. HATÁRRÉTEG EGYENLETEK	21
3.3. EXPONENCIÁLIS SOR MEGOLDÁS	24
4. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS MOZGÓ, ÁTERESZTŐ SÍKLAP FÖLÖTT	36
4.1. BEVEZETÉS	36
4.2. A MODELL ALAP EGYENLETEI	37
5. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS PORÓZUS KÖZEGBE HELYEZETT FÜG- GŐLEGES SÍKLAP MENTÉN	47
5.1. BEVEZETÉS	47
5.2. AZ ÁRAMLÁST LEÍRÓ EGYENLETEK	48
5.3. EGZAKT MEGOLDÁS	53
5.4. EREDMÉNYEK	53
6. ÖSSZEFOGLALÁS, TÉZISEK	68
6.1. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TERVEZETT KUTATÁSI IRÁNYOK	68
6.2. TÉZISEK	69
6.2.1. I. TÉZIS	69
6.2.2. II. TÉZIS	69
6.2.3. III. TÉZIS	69
6.2.4. IV. TÉZIS	70

7. SUMMARY	71
7.1. SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS	71
7.2. THESES	72
7.2.1. I. THESIS	72
7.2.2. II. THESIS	72
7.2.3. III. THESIS	72
7.2.4. IV. THESIS	73
Melléklet	74
AZ EXPONENCIÁLIS SOR EGYÜTTHATÓINAK SZÁMÍTÁSA A MARANGONI- HATÁS MOZGÁSEGYENLETÉBEN	74
AZ EXPONENCIÁLIS SOR EGYÜTTHATÓINAK SZÁMÍTÁSA A MARANGONI-HATÁS ENERGIAEGYENLETÉBEN	75
SEBESSÉG PROFIL SZÁMÍTÁSA MOZGÓ, ÁTRESZTŐ SÍKLAP FÖLÖTT	76
HŐMÉRSÉKLETPROFIL SZÁMÍTÁSA MOZGÓ, ÁTRESZTŐ SÍK- LAP FÖLÖTT	77
SEBESSÉG ÉS HŐMÉRSÉKLET PROFIL SZÁMÍTÁSA FOLYADÉK- KAL TELÍTETT PORÓZUS KÖZEGBEN	78
Az értekezés témakörében készített saját publikációk	79
FOLYÓIRATCIKKEK	79
KONFERENCIAKÖZLEMÉNYEK	80
FÜGGETLEN HIVATKOZÁSOK	82
Irodalomjegyzék	83

1. BEVEZETÉS

Az értekezésben néhány olyan peremértékfeladat numerikus és analitikus megoldásának meghatározását mutatom be, amelyek matematikai modelljei newtoni folyadékok határréteg áramlását írják le különböző fizikai alkalmazásokban.

A folyadékmechanika alapjait Archimedes fektette le az időszámításunk előtti 3. évszázadban. Őt követően az időszámításunk szerinti 15. évszázadban Leonardo da Vinci, majd a 17. évszázadban Isaac Newton folytatta a folyadékok dinamikai és statikai tulajdonságainak kvantitatív vizsgálatát, aki kísérleti eredményeit a *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* című könyvének második kötetében foglalta össze. Ezen eredményekre alapozva végzett kutatásokat Daniel Bernoulli, Jean le Rond d'Alembert és Leonard Euler a 18. században. A folyadékáramlás matematikai modellje az ún. Euler egyenlet, amely a nyomás és sebesség függvényében adja meg az áramlást. A 19. században Claude-Louis Navier és George Stokes írták fel a viszkózus folyadék áramlásának matematikai modelljét nemlineáris parciális differenciálegyenletekkel, amelyekhez általános esetben nem adható meg analitikus megoldás. Ludwig Prandtl 1905-ben a Navier-Stokes egyenletekre egy egyszerűsítést javasolt, az ún. határréteg egyenleteket, ezzel megalapozva a határréteg áramlás elméletét. Heinrich Blasius publikálta 1908-ban vízszintes síklap fölötti határréteg áramlás megoldását hasonlósági módszerrel [12]. A téma egyik legismertebb könyve newtoni folyadékokra a Hermann Schlichting által írt "Boundary-Layer Theory" c. könyv. Részletesebb történeti áttekintést Anderson [4] cikkében olvashatunk.

A 20. század elején megalapozott határréteg áramlás rövid idő alatt népszerűvé vált a kutatók körében, mivel a természetben számtalan áramlási jelenség figyelhető meg, melyek megértése kardinális jelentőségű a technikai előrehaladás tekintetében. Az űrkutatás, elektronika, telekommunikáció, szálítványozás és egyéb területek fejlődése robbanászerű változást idézett elő az alapanyagok előállítási és felhasználási folyamatainak modernizációjában. Ennek köszönhetően az utóbbi két évtizedben jó néhány alapanyag került a felhasználók és kutatók érdeklődésének középpontjába, amelyek közül jelentősebbek a félvezető- és optikai anyagok, bioanyagok, kerámiák, speciális polimerek és különleges ötvözetek. A kidolgozott új megközelítés célja az egyedi anyagtulajdonságok elérése, a termékek minőségének javítása a gyártási költségek csökkentése mellett. Napjainkban a speciális anyagok iránti kereslet növekedése szükségessé teszi az alapanyag előállítás és felhasználás folyamatos kutatását. Megannyi anyagfeldolgozási eljárás során figyelhető meg folyadékáramlás, amely kulcsfontosságú a végtermék minőségének és egyéb

jellemzőinek meghatározásánál, illetve az előállítási műveletek irányításának és optimalizálásának szempontjából. Más szóval a folyadékmechanika és azon belül a folyadékáramlás rendkívül fontos szerepet játszik az anyagfeldolgozási eljárások széles körében, úgy mint kristályképzés, öntés, fröccsöntés, hegesztés, forrasztás, műanyagok, élelmiszerek és egyéb polimer anyagok extrudálása, optikai szálak, illetve kompozit anyagok gyártása. Kristályképzés során az olvadt anyagban kialakuló áramlás erősen hatással van a keletkező kristály minőségére, ezáltal a kristályból gyártott félvezető szerkezetére is kihat. Ezért szükséges az áramlási folyamat megértése és minél pontosabb feltérképezése, amely lehetőséget ad a nem kívánt hatások ellenőrzésére és kiküszöbölésére. Hasonlóképpen a felületi feszültség hatására alakul ki áramlás hegesztés és forrasztás során az olvadt fémekben, ahol a kötés kialakulását befolyásolja az áramlás. Míg optikai szál gyártásánál a keletkező szál profiljára az olvadt üveg viszkozus áramlása és a gravitáció van hatással.

Yogesh Jaluria [41] tanulmányában részletesen ismerteti néhány ilyen folyamatot (optikai szál gyártása, kristályképzés félvezetők előállításához, öntés, vékony film gyártása, polimerek készítése) és kiemeli a folyadékmechanika területén kifejlesztett technikák és eredmények gyakorlati alkalmazhatóságát.

Kutatómunkám során az alábbi három lamináris áramlási jelenséghez tartozó matematikai modell vizsgálatát jelöltem meg célként:

Nem-newtoni áramlások:

Fontos szerepet játszanak azok a folyamatok, amelyekben a folyadék viszkozitása az áramlás nyírási sebességétől függ, különösen a műanyagok és egyéb polimer anyagok feldolgozása során (pl. az extrudálás vagy a fröccsöntés). A nem-newtoni viselkedés jelentősen nehezíti az áramlás leírását.

Felületi feszültség által indukált áramlás:

Hegesztés és forrasztás során az olvadt fém áramlását többnyire a felületi feszültség befolyásolja. Mikrogravitációs körülmények között (például űralkalmazásokban) különösen dominánssá válik a felületi feszültség olyan folyamatoknál, mint a kristály növekedés és szilárdulás, amikor a felhajtóerő csökken. Ezen körülmények között meghatározó az ún. Marangoni-hatás, amit a hőmérséklet és/vagy koncentráció változással járó felületi feszültségváltozás idéz elő.

Folyadékáramlás bevonó eljárásokban:

Korozív környezetben alkalmazott felületek ellenálló képességét bevonással növelik. Az optikai szálakat polimer bevonat erősíti. Az anyagok széles skáláját alkalmazzák bevonatok készítésére, a műanyagoktól a fémekig. A bevonat vastagságát és annak minőségét - különösen a benne maradt buborékokat és egyéb anyaghibákat - a bevonatolás közben fellépő áramlás határozza meg. Elengedhetetlen a folyamatban résztvevő alapvető áramlási mechanizmusok

megértése, amely lehetőséget ad a bevonat tulajdonságainak javítására. A feladat magában foglalja a bevonandó felszín mindkét oldalán végbemenő folyadékáramlást.

Az értekezés célja a fent említett áramlási jelenségekhez tartozó négy matematikai modell felírása és ezek megoldásainak vizsgálata. A határréteg áramlást mint peremérték feladatot minden esetben parciális differenciálegyenlet-rendszerrel írjuk föl a hozzá tartozó peremfeltételekkel. Az egyenlet-rendszert hasonlósági transzformáció alkalmazásával visszavezetjük közönséges differenciálegyenlet-rendszerre, melynek keressük numerikus, illetve analitikus megoldásait.

Az értekezés megírása során törekedtem a szakirodalomban használt jelölések megtartására, ezért fejezetenként elkészítettem a jelölések, illetve a görög szimbólumok listáját, ahol egyértelműen megjelöltem, hogy az adott fejezetben az adott szimbólummal mit jelölünk.

Értekezésem második fejezetében ömlesztett anyagok szállítószalagon történő szállítását elemzem. Ebben az esetben az ömlesztett anyagok vízszintes, lejtő- vagy emelkedőirányban történő szállításakor az anyagban kialakuló sebességeloszlást vizsgálják (l. Benedetto, Caglioti és Pulvirenti 1999 [10], Ancey 2003 [3]). A folyamatot határréteg áramlással modellezem nem-newtoni közegre. A folytonossági és a mozgásegyenletekhez peremfeltételek járulnak a mozgó síklap mentén, illetve a szállított anyag felületén. A sebességeloszlást különböző mért anyagjellemzők, szállítószalag sebességek és lejtőszögek esetén vizsgálom.

A harmadik fejezetben az ún. Marangoni-hatás matematikai modelljét vizsgálom, ahol a határréteg áramlást a folyadék felületén kialakuló feszültségváltozás idézi elő (pl. Napolitano 1979 [52], Arafune és Hirata 1998 [5], Christopher és Wang 2001[26]). Ennek jelentős szerepe van különböző gyakorlati feladatok során, mint például a kenéselméletben, a bevonatok készítésében és a habok száradásában. A felírt modell egy csatolt parciális differenciálegyenlet-rendszer. Az egyenletek és a hozzájuk járuló peremfeltételek anyagjellemző paramétereket is tartalmaznak. Vizsgálataim során a felírt parciális differenciálegyenlet-rendszert alkalmasan megválasztott hasonlósági transzformációval visszavezetem közönséges differenciálegyenlet-rendszerre. A peremfeltételek megfelelő átalakítása után a feladathoz exponenciális sor alakú megoldást állítok elő és vizsgálom azoknak a paraméterektől való függését.

A negyedik fejezetben vízszintes síklap mentén kialakuló konvektív határréteg áramlás modelljével foglalkozom nem-newtoni közegre. Napjainkban számos dolgozat jelent meg newtoni folyadékok síklap fölötti hidrodinamikai és termodinamikai határrétegeiben létrejövő áramlási jellemzők matemati-

kai vizsgálatáról konvektív peremfeltételek alkalmazásával, amikor a síklapot aluról, konvektív módon melegítik forró folyadékkal (lásd pl. Aziz 2009 [7], Ishak 2010 [40], Magyarai 2011 [49]). A modell alkalmazható az iparban gyártási folyamatok leírására, mint pl. a polimer lemeztáblák és fóliák előállítása, papírgyártás, üvegfújás, műanyagok extrudálása. Vizsgálataim nem-newtoni közegbe helyezett áteresztő és nem áteresztő síklap mentén kialakuló konvektív határréteg áramlás vizsgálatára irányulnak, azaz arra, hogyan hatnak az anyagi és áramlástan paraméterek a hőmérséklet és a sebesség változásának alakulására.

Az értekezés ötödik fejezetében a porózus közegbe helyezett függőleges síklap mentén kialakuló konvektív áramlást tanulmányozom. A függőleges síklap körüli konvekciót az 1970-es években kezdték vizsgálni (Cheng és Min-kowycz 1977 [22]). Telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap körüli szabad konvektív áramlás alkalmazható például néhány geofizikai és mérnöki probléma leírására. Furumoto 1975-ben megjelent tanulmányában azt írja le, hogy a vulkanikus régióban kialakított hőhidak segítségével a felszín alatti vizek fűthetőek, melyeket megcsapolással energiatermelésre használhatunk [31]. További gyakorlati alkalmazásként megemlíthető az energiahatékony épületek és épületelemek tervezése, a kompakt hőcserélők, napkollektorok és az élelmiszeripari alkalmazások. A vizsgált modellekben a sűrűség és a hőmérsékletváltozás között lineáris viszonyt alkalmaznak, amit a síklap és az azt körülvevő folyadék közötti kis hőmérsékletkülönbség indokol (Vajravelu és Sastri 1977 [61], Nazar, Arifin és Pop 2006 [53]). Abban az esetben, ha a folyamat nagy hőmérsékletkülönbség mellett megy végbe, akkor a sűrűség és a hőmérséklet kapcsolata másodfokú összefüggéssel írható le (Vajravelu és Sastri 1977 [61]). Vizsgálataim célja konvektív áramlás elemzése hasonlósági transzformáció alkalmazásával kis és nagy hőmérsékletkülönbség esetén és előállítom a feladatok numerikus, illetve analitikus megoldását.

2. ÁRAMLÁS LEJTŐN

2.1. BEVEZETÉS

A lejtőn való áramlás tulajdonságainak vizsgálata elméleti és gyakorlati jelentősége miatt sok kutató figyelmét felkeltette [3]-[11]. A gravitáció hatására állandósult, lefelé történő folyamatos mozgást végző folyadék pl. a lávafolyam vagy a folyók áramlása. Hasonló jelenséggel találkozunk szállítószalagon való szállításkor és a kenélméletben is. Granulált anyagok áramlásának leírása fontos lehet geofizikai vészhelyzetek előrejelzése során vagy ipari eljárások esetén ([11], [21], [42], [46], [60], [64]). Az állandó üzemben működő szállító gépek az ömlesztett anyagot vagy darabárut vízszintes, lejtő, emelkedő vagy függőleges irányban általában folytonos anyagáramban továbbítják. Ömlesztett anyagok a szállítás során viselkedhetnek szilárd testként vagy folyadékként. Szemcsés anyagokat folyadékként modellezik, ezen anyagok áramlása során mozgásuk függ a nyírási sebességtől, ebben az értelemben a granulált anyagok hasonlóságot mutatnak a klasszikus nem-newtoni folyadékokkal. A modellben hatvány függvény szerinti összefüggést alkalmazunk a nyírási sebesség és nyírási feszültség között. A fejezet számítási példájában vizsgált homok zagy esetén a reológiai paramétereket kísérletek alapján határoztuk meg (l. [S3] dolgozat), agyagra pedig a Jiao és Sharma által publikált adatokat alkalmazzuk [42].

Jelölések

A, B [-]	integrációs konstansok
c [%]	koncentráció
g [ms^{-2}]	gravitációs gyorsulás
h [mm]	áramló réteg magassága
n [-]	hatványkitevő
q [m^3s^{-1}]	lokális térfogatáram
u, v [ms^{-1}]	x és y irányokhoz tartozó sebesség koordináták
U [ms^{-1}]	szállító sebesség
x, y [m]	derékszögű koordináták

Görög szimbólumok

α [°]	dőlésszög
γ [Pas ⁿ]	anyagjellemző konstans
ρ [kgm ⁻³]	folyadék sűrűsége
τ_{xy} [Pa]	feszültségtenzor eleme

2.2. A FOLYAMATOT LEÍRÓ EGYENLETEK

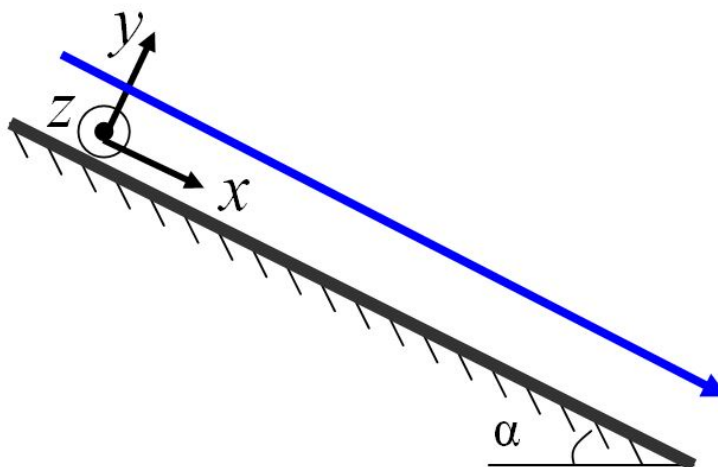
Ömlesztett anyag szállítása során az anyagszemcsék mozgását határréteg áramlasként a Navier-Stokes egyenletekkel modellezzük (ld. [3], [11], [13], [21]-[65]). Viszkózus és összenyomhatatlan folyadékot tételezünk fel. Stacionárius megoldásokat keresünk.

A ferde szállítószalagon állandósult sebességű anyagszállítás során a mozgó felületi feletti tartományban a sebességváltozást egy összefüggéssel fogjuk megadni, amely az alábbi négy paramétert tartalmazza:

- U a szállítószalag szállító sebessége, amelyet állandó értéknek tekintünk a folyamatos szállítás során. Futószalagok szállítási sebességére léteznek ajánlások, melyekben a sebesség függ a szállított anyag tulajdonságaitól (szemcseméret, sűrűség stb.), a heveder szélességétől és a szállítás irányától, azaz lejtőn, emelkedőn vagy vízszintesen történik a szállítás.
- α a szállítószalag vízszintessel bezárt szöge, mely jellemzi a szállítás irányát, ha $\alpha = 0$, akkor vízszintesen szállítunk, ha $\alpha > 0$, akkor lejtőn vagy emelkedőn történik a szállítás. A szög nagysága nagyban függ a szállított anyag tulajdonságaitól, a gyakorlatban általában $0 - 20^\circ$ között változik.
- γ a nem-newtoni folyadékként modellezett ömlesztett anyagok egy fontos jellemzője. Ez a paraméter függhet az anyagra nehezedő nyomástól, az anyag sűrűségétől és a hőmérséklettől is [S3], [42]. Vizsgálataink során γ értékét konstansnak tekintjük.
- n a hatványmodell kitevőjében szereplő paraméter, mely szintén a szállított anyagtól függően különböző értékeket vesz föl [S3], [42].

Modellünkben feltesszük, hogy a szállítás állandó hőmérsékleten és állandó nyomáson történik, így a γ és n értéke csak az anyag fajtájától fog függeni.

Az ömlesztett anyagban kialakuló áramlást az alábbi alapegyenletekkel adjuk meg:



2.1. ábra. A vizsgált áramlás fizikai modellje

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

kontinuitási egyenlet és a Navier-Stokes egyenletből származtatott

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + g \sin(\alpha), \quad (2.2)$$

mozgásegyenlet abban az esetben, ha nincs nyomásváltozás a folyamatban, az egyenletekben az x és y a szállítószalag síkjával párhuzamos és az arra merőleges koordinátákat jelölik, u és v az x és y koordinátákhoz tartozó sebesség komponensek, ρ a szállított anyag sűrűségét jelöli, g a gravitációs gyorsulás, τ_{xy} pedig a feszültség tenzor megfelelő eleme, melyet a szállított anyagokra a hatványfüggvény törvény alkalmazásával a

$$\tau_{xy} = \gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.3)$$

alakban írunk fel, amelyben γ és n anyagjellemző konstansok. Az n kitevő értéke lehet egynél kisebb szám, pl. agyagmassza esetén $n \approx 0,3$ [42], lehet egynél nagyobb érték például homok-zagy [S3], vagy száraz granulátum esetén ez 2 körüli szám. A feladathoz járuló peremfeltételek U konstans sebességgel lefelé mozgó szállítószalag esetén:

$$u|_{y=0} = U, v|_{y=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=h} = 0. \quad (2.4)$$

A feltételben szereplő h az áramló réteg magasságát jelöli.

2.3. ÁRAMLÁS NEWTONI FOLYADÉKOK ESETÉN

Newtoni folyadékok áramlása esetén a (2.3) kifejezésben $n = 1$ és γ a dinamikus viszkozitást jelöli. Lejtőn lefelé történő állandósult, teljesen kifejldött, lamináris áramlás esetén a mozgásegyenlet:

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \sin(\alpha) = 0. \quad (2.5)$$

A vizsgált szállítás során nincs nyomásváltozás. Meghatározzuk a (2.5) egyenlet megoldását a következőképpen:

$$u(y) = -\frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \frac{y^2}{2} + Ay + B. \quad (2.6)$$

Az egyenlethez járuló feltételeket figyelembe véve az A és B integrációs konstansok előállíthatóak, tehát

$$u(y) = \frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) + U. \quad (2.7)$$

A (2.7) megoldásfüggvény írja le a ferde szállítószalag felületén kialakuló áramlás sebesség-eloszlását h magasság és U szállítósebesség esetén. A (2.7) általános megoldásból meghatározható a q lokális térfogatáram

$$q = \int_0^h u dy = \frac{\rho g h^3 \sin \alpha}{\mu} + Uh. \quad (2.8)$$

2.4. ÁRAMLÁS NEM-NEWTONI FOLYADÉKOK ESETÉN

Ostwald-de Waele-féle hatványtörvény 2.3 szerinti nem-newtoni folyadék α ferdeszögű szállítószalagon való szállításakor a (2.2) mozgásegyenlet a (2.3) felhasználásával

$$\gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (2.9)$$

alakban írható fel, ahol γ és n kifejezi a szállított anyag nem-newtoni tulajdonságát. A nyomást ebben az esetben is állandónak tekintjük. A feladathoz ugyanazok a peremfeltételek járulnak, azaz $u|_{y=0} = U$ és $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=h} = 0$, melyekkel a megoldás:

$$u(y) = U + \left(\frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left(h^{\frac{1+n}{n}} - (h-y)^{\frac{1+n}{n}} \right). \quad (2.10)$$

A térfogatáram a $q = \int_0^h u dy$ integrállal számítva nem-newtoni folyadékokra

$$q = Uh + \left(\frac{\rho g}{\gamma} \sin \alpha\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2n+1} h^{\frac{1+2n}{n}} \quad (2.11)$$

egyenlettel adható meg.

Megjegyezzük, hogy vízszintes felületen ($\alpha = 0$) ömlesztett anyag szállításakor a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.12)$$

kontinuitási és mozgásegyenlet írja le a folyamatot.

2.5. SEBESSÉGELOSZLÁS MEGHATÁROZÁSA

Sebességeloszlást két különböző típusú nem-newtoni folyadékokra határozzuk meg. Első esetben agyagmasszára ($n < 1$), második esetben homok zagyra ($n > 1$).

Agyagmassza esetén:

Feltesszük, hogy 1[m] széles gumihevederen szállítunk agyagmasszát, így az $U = 2, 5$ [m/s] szállítási sebességgel, $h = 5$ [mm] magassággal és $\rho = 1040$ [kg/m³] sűrűséggel számolunk. Ezen rögzített paraméterek mellett vizsgáljuk, hogy az α , γ és n paraméterek változása milyen változást idéz elő a sebességeloszlásban. Számításaink során a [10], [42] dolgozatokban megadott paraméter értékeket alkalmazzuk agyagmassza esetén.

2.1. táblázat. Paraméter értékek különböző agyagmasszák esetén [42]

Agyagmassza típusa	γ [Pas ⁿ]	n	ρ [kg/m ³]
friss vízes	0,8	0,319	1040
diszpergált	0,7	0,313	1059
flokkulált	1,7	0,235	1063

A vizsgált három paraméterből kettőt rögzítve, a harmadikat változtatva megvizsgáljuk az egyes paraméterek hatását a sebességeloszlásra.

Először az n hatványkitevő hatását tekintjük, amikor $\alpha = 15^\circ$ és $\gamma = 0,7$ [Pasⁿ].

A 2.2. ábrából egyértelműen leolvasható, hogy az n értékének növelése a sebességeloszlás maximumának csökkenéséhez vezet.

Következő vizsgált paraméter a γ , az $\alpha = 15^\circ$ és $n = 0,4$ értékek rögzítettek. Azt tapasztaltuk (lásd 2.3. ábra), hogy a γ paraméter értékének

növelésével a sebességeloszlás maximum értéke csökken, de hatása kevésbé jelentős, mint az n paraméteré.

Végül az α paraméter hatását vizsgáltuk meg, amikor $n = 0,4$ és $\gamma = 0,7[\text{Pas}^n]$. A szállítószalag dőlési szögét változtatva azt tapasztaltuk, hogy az áramló közegben a sebességeloszlás maximuma nő, ha az α értékét növeljük, azaz meredekebb lejtőn szállítunk (lásd 2.4. ábra). Tehát összegezve a tapasztalatainkat, az α paraméter hatása az előző két paraméter, azaz n és γ hatásának az ellentettje.

Homok zagy esetén:

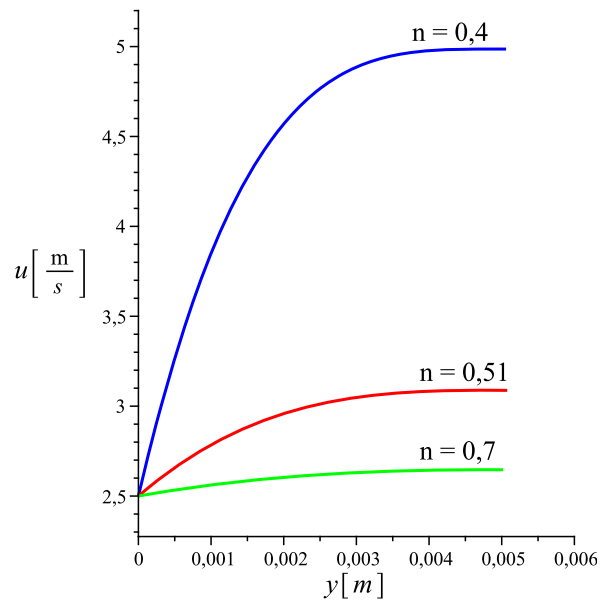
A vizsgálatainkat az előző pontbeli feltételekkel folytatjuk, de γ és n paraméterekre a [S3] dolgozatban ismertetett értékeket alkalmazzuk 25%-40% térfogat koncentráció esetén (lásd 2.2 táblázat).

2.2. táblázat. Paraméter értékek különböző homok zagyok esetén

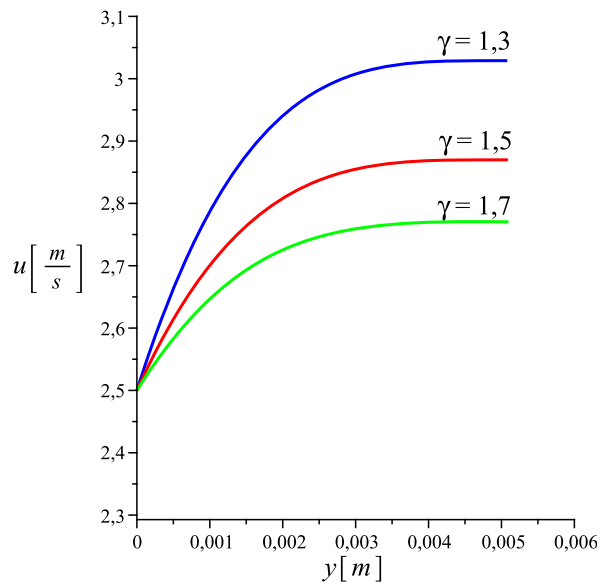
Térfogat koncentráció c	$\gamma[\text{Pas}^n]$	n	$\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$
20%	0,000313	1,475	1340
25%	0,000538	1,444	1425
30%	0,001388	1,360	1510
40%	0,026902	1,211	1680

Először a c térfogat koncentráció hatását vizsgáljuk a víz-homok keverék esetén.

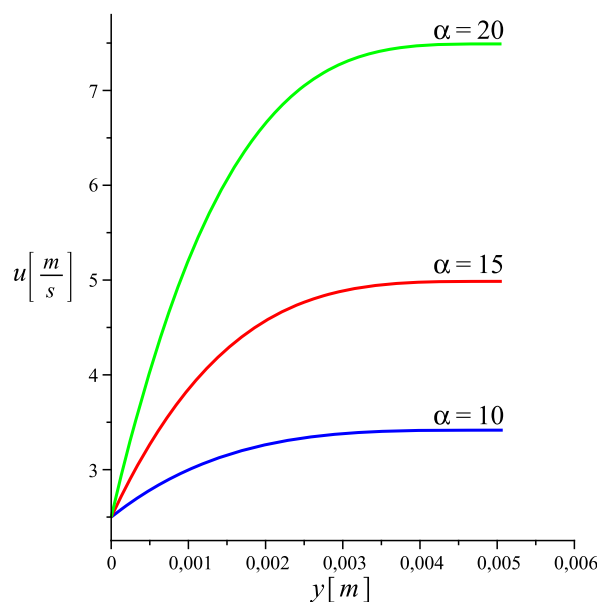
A numerikus számításokat MAPLE 12 programban végeztük. A sebesség eloszlásokat a 2.2-2.6. ábrák szemléltetik. A számítások alapján a sebesség maximuma nagyobb koncentráció esetén csökken. Az α lejtőszög hatását elemezve az 2.6. ábra alapján megállapítható, hogy a sebesség maximuma nagyobb dőlési szög esetén megnő.



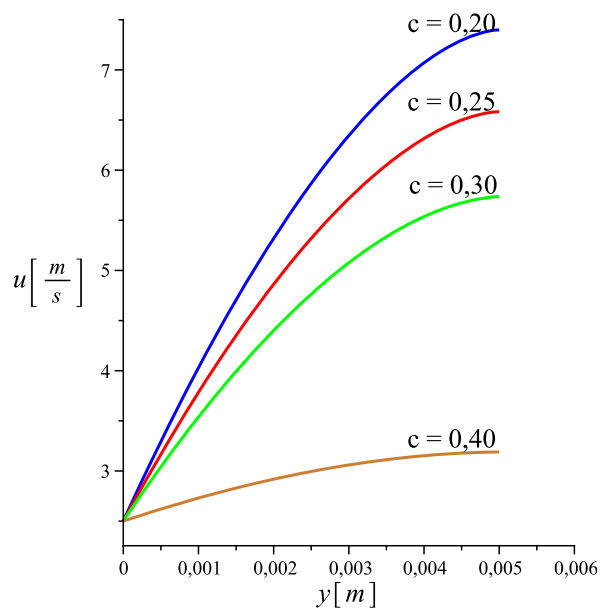
2.2. ábra. Az n hatványkitevő változásának hatása agyagmasszában ($\gamma = 0,7[\text{Pas}^n]$, $\alpha = 15^\circ$)



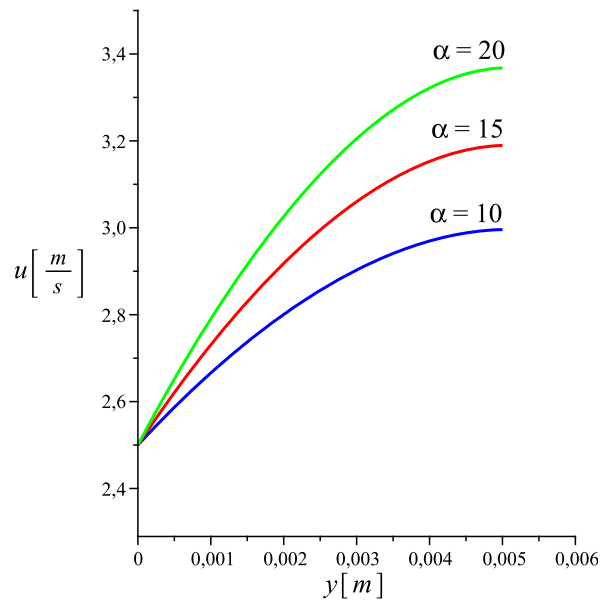
2.3. ábra. A γ paraméter változásának hatása agyagmasszában ($n = 0,4$, $\alpha = 15^\circ$)



2.4. ábra. Az α paraméter változásának hatása agyagmasszában ($n = 0,4$, $\gamma = 0,7[\text{Pas}^n]$)



2.5. ábra. A sebességeloszlás különböző koncentrációjú homok zagyok esetén (paraméter értékek a 2.2 táblázatban)



2.6. ábra. Az α paraméter sebességeloszlásra gyakorolt hatása 20% térfogat koncentrációjú homok zagy esetén ($n = 1,475$, $\gamma = 0,000313[\text{Pas}^n]$)

3. MARANGONI-HATÁS VIZSGÁLATA

3.1. BEVEZETÉS

Azt a jelenséget, amikor egy folyadék felületén a hőmérséklet és/vagy koncentráció gradiens változásából származó felületi feszültség változás a folyadékban mozgást hoz létre, Marangoni konvekciónak nevezik. Ez számos mérnöki probléma esetén megjelenik pl. gőz buborékok körüli nukleáció és gőz buborékok növekedése során a felületi feszültség változása miatt, amelyet a hőmérséklet és/vagy koncentráció változások okoznak a buborékok felületén [26]. A természetes konvekció kísérleti és numerikus vizsgálatai is azt mutatják, hogy a hőtadás jelentős lehet a Marangoni áramlás miatt mikrogravitációban, de még a Föld gravitációjában is [27]. A kristályok növekedése esetén nemkívánatos jelenségek lépnek fel ([5], [25], [26], [51]). Több dolgozatban foglalkoztak a Marangoni-féle határréteg áramlással nanofolyadékokban. Ezek a folyadékok jelentősen megváltoztatják az alapfolyadék hőtadási jellemzőit; ipari alkalmazásokban pl. a kenőanyagok, hőcserélő- és hűtőfolyadékok esetén [6], [20], [29]. Az irodalomban a nanofolyadékokat különböző nanorészecskékkel vizsgálják: oxid kerámiák, nitrit kerámiák, alumínium, stb. [69]. A Marangoni áramlásnak nagy jelentősége van a hegesztésben, félvezetőgyártásban és az űrkutatásban is.

A Marangoni-hatás matematikai modelljét több dolgozatban elemezték (ld. [6], [27], [36]). A feladatok többségében a konvekciót hasonlósági megoldások alkalmazásával vizsgálták [5], [6], [26], [59], [66], [69]. A vizsgálatok során a felületi feszültség függhet egyrészt a hőmérséklettől, másrészt a koncentráció gradienstől [51]. A hasonlósági megoldások bevezetésével a határréteg áramlás egyensúlyi egyenleteit leíró parciális differenciálegyenleteket közönséges differenciálegyenletekre redukálhatjuk, az áramfüggvényre és a hőmérsékletre. Ezen egyenletek peremérték-feladatait vizsgáljuk.

Jelölések

A [-]	hőmérséklet gradiens együttható
$A_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ [-]	exponenciális sor együtthatói
$B_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ [-]	exponenciális sor együtthatói
C_1, C_2 [-]	konstansok
d [-]	konstans
f [-]	hasonlósági függvény
K [$m^2 s^{-1}$]	kinematikai viszkozitás
m [-]	hatványkitevő
Pr [-]	Prandtl-szám
T [K]	hőmérséklet
u, v [ms^{-1}]	x és y irányú sebesség koordináták
x, y [m]	derékszögű koordináták
Z [-]	változó

Görög szimbólumok

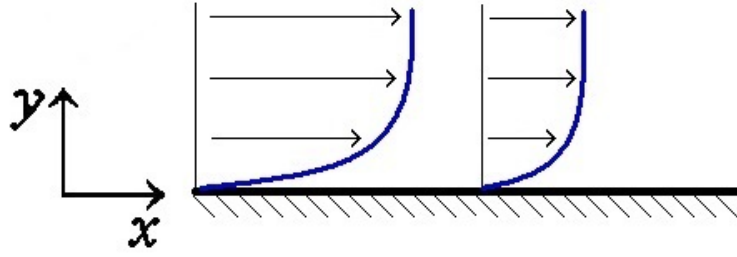
α [-]	konstans
α_f [$m^2 s^{-1}$]	hődiffúzió
$\zeta = f'(0)$ [-]	konstans
η [-]	hasonlósági változó
Θ [-]	hasonlósági függvény
μ [$Pa \cdot s$]	dinamikai viszkozitás
ρ [$kg \cdot m^{-3}$]	folyadék sűrűsége
σ_T [$Nm^{-1}K^{-1}$]	konstans
Ψ [$m^2 s^{-1}$]	áramfüggvény

3.2. HATÁRRÉTEG EGYENLETEK

Kétdimenziós, sűrűdéses, összenyomhatatlan, newtoni folyadék stacionárius lamináris áramlását vizsgáljuk síklapon. Legyen $x \geq 0$ a sík irányába és $y \geq 0$ a síkra merőleges koordináta az $y = 0$ sík egyenlettel. A síklapot az $x = y = 0$ pontba helyezzük.

A határréteg áramlást leíró folytonossági, mozgás- és energiaegyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$



3.1. ábra. A vizsgált áramlás fizikai modellje

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = K \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_f \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (3.3)$$

ahol u és v az x , illetve y irányú sebességkomponensek a sík lap mentén, T a hőmérséklet, α_f jelöli a hődiffúziót és $K = \mu/\rho$ a környező folyadék kinematikai viszkozitása, melyet modellünkben konstans értéknek feltételezünk.

A Marangoni-hatás a hőmérsékletmező és a sebességmező közötti összefüggéssel jellemezhető [27], [59]. A peremfeltételeket az $y = 0$ felületen és $y \rightarrow \infty$ esetén az alábbiak szerint vesszük figyelembe:

az $y = 0$ síkban:

$$\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = -\sigma_T \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=0}, \quad (3.4)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (3.5)$$

$$T(x, 0) = T(0, 0) + Ax^{m+1} \quad (3.6)$$

a felülettől távol $y \rightarrow \infty$

$$u(x, \infty) = 0, \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=\infty} = 0 \quad (3.8)$$

ahol $\sigma_T = d\sigma/dT$ (ahol $\sigma(T) = \sigma_T T + C$, C =állandó), A a hőmérsékletgradiens együtthatója, m a hatványkitevőben szereplő paraméter. Az m kitevő lineáris közelítés esetén 0, míg négyzetes közelítés esetén 1 értéket vesz fel. Az m paraméter legkisebb értéke -1 , amely azt az esetet jelöli, ahol már a felület mentén nincs hőmérséklet-változás és ezért a Marangoni-hatás nem alakul ki.

Bevezetjük a ψ áramfüggvényt az alábbi formulával:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Ezt alkalmazva a (3.2) egyenletre:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = K \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (3.10)$$

Bevezetve a következő hasonlósági függvényeket (az irodalomból átvett formulákkal [26])

$$\psi = C_1 x^a f(\eta), \quad \Theta(\eta) = \frac{T(x, y) - T(0, 0)}{Ax^c}$$

az

$$\eta = C_2 x^b y$$

hasonlósági változóval, ahol $C_1 = \sqrt[3]{(m+1)\mu\sigma_T A/\rho^2}$ és $a = (m+2)/3$, illetve $C_2 = \sqrt[3]{(m+1)\rho\sigma_T A/\mu^2}$ és $b = (m-1)/3$ továbbá $c = m+1$ értékek mellett létezik hasonlósági megoldás. Ekkor a (3.9), (3.10) parciális differenciálegyenlet rendszer egy harmadrendű közönséges differenciálegyenletté alakítható:

$$f''' - \frac{2m+1}{3} f'^2 + \frac{m+2}{3} f f'' = 0. \quad (3.11)$$

Az egyenlethez járuló (3.4)-(3.8) peremfeltételek a hasonlósági változókkal

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'(\infty) = 0 \quad (3.12)$$

alakba írhatóak.

A Θ hőmérsékleti hasonlósági függvényt behelyettesítve a (3.3) energiaegyenletbe és hozzátartozó peremfeltételbe a következő peremértékfeladatot kapjuk:

$$(m+1)f'\Theta - \frac{m+2}{3}f\Theta' = \frac{1}{\text{Pr}}\Theta'', \quad (3.13)$$

$$\Theta(0) = 1, \quad \Theta'(\infty) = 0, \quad (3.14)$$

ahol $\text{Pr} = \mu/(\rho\alpha_f)$ jelöli az ún. Prandtl-számot. A (3.11) és (3.13) egyenletekben szereplő $f(\eta)$ a dimenziómentes áramfüggvényt, míg $\Theta(\eta)$ a dimenziómentes hőmérséklet függvényt jelöli és az egyenletben szereplő deriváltak η szerinti deriválást jelentik.

Ezek után a határrétegbeli közegben a sebesség komponensek az f hasonlósági függvénnyel a következőképpen fejezhetőek ki:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \kappa^2 \sqrt[3]{\frac{\rho}{\mu}} x^{\frac{2m+1}{3}} f'(\eta), \\ v(x, y) &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\kappa}{3} x^{\frac{m-1}{3}} \left[(m+2) \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho}} f(\eta) + (m-1) \kappa \sqrt[3]{\frac{\rho}{\mu}} x^{\frac{m-1}{3}} y f'(\eta) \right], \end{aligned}$$

ahol $\kappa = \sqrt[3]{(m+1) \sigma_T A / \rho}$, $\sigma_T = \text{konstans}$.

Megjegyezzük, hogy $m = 1$ esetén a megoldás explicit alakban megadható [50]:

$$f(\eta) = 1 - e^{-\eta} \quad \text{és} \quad \Theta(\eta) = e^{-\eta}. \quad (3.15)$$

Célunk egy közelítő exponenciális sor alakú megoldás előállítása a (3.11)-(3.12) és (3.13)-(3.14) nemlineáris peremérték feladatokhoz különböző m hatványkitevő és Prandtl-szám értékek mellett, továbbá bemutatni a megoldások változását ezen különböző paraméter értékekre.

3.3. EXPONENCIÁLIS SOR MEGOLDÁS

Ebben a részben a (3.11)-(3.12) feladatban szereplő $f(\eta)$ függvény lokális közelítő megoldását határozzuk meg. A végtelenben adott peremfeltételt a shooting módszer alkalmazásával helyettesítjük egy, az $\eta = 0$ -beli kezdeti feltétellel. A (3.11)-(3.12) peremérték feladat helyett a (3.11) egyenletet tekintjük az alábbi kezdeti feltételekkel

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'(0) = \zeta, \quad (3.16)$$

ahol ζ konstans.

Figyelembe véve a (3.12) feltételek között a harmadikat, keressük a (3.11)-(3.16) kezdetiérték feladat megoldását az alábbi alakban:

$$f(\eta) = \alpha \left(A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i d^i e^{-\alpha \eta^i} \right), \quad (3.17)$$

ahol $\alpha > 0$, $A_0 = 3/(m+2)$, A_i ($i = 1, 2, \dots$) az exponenciális sor együtthatóit jelöli és $\alpha > 0$, illetve d konstansok.

A (3.16) első és második feltételéből adódik a következő egyenletrendszer:

$$\alpha \left(A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i d^i \right) = 0, \quad (3.18)$$

$$\alpha^3 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 A_i d^i = -1. \quad (3.19)$$

Megjegyezzük, hogy a klasszikus Briot-Bouquet-tétel [19] biztosítja a (3.11)-(3.16) kezdetiérték feladat (3.17) alakú formális megoldását, a megoldások konvergenciáját, illetve az A_0 értékét.

Bevezetjük a új Z változót a következőképpen:

$$Z = de^{-\alpha\eta}.$$

Nilvánvaló, hogy a harmadik peremfeltétel (3.12)-ben automatikusan teljesül. A (3.11) differenciálegyenletbe helyettesítve a (3.17)-t

$$-\sum_{i=1}^{\infty} i^3 A_i Z^i + \frac{m+2}{3} \left(A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i Z^i \right) \sum_{i=1}^{\infty} i^2 A_i Z^i - \frac{2m+1}{3} \left(\sum_{i=1}^{\infty} i A_i Z^i \right)^2 = 0$$

adódik. Egyenlővé téve Z megfelelő kitevőjű tagjainak együtthatóit meg tudjuk határozni az A_2, A_3, \dots együtthatókat az m és A_1 paraméterekkel:

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{1}{12} A_1^2 (m-1) \\ A_3 &= \frac{1}{216} A_1^3 (m-1)(m-2) \\ A_4 &= -\frac{1}{15552} A_1^4 (m-1)(4m^2 - 15m + 17) \\ A_5 &= \frac{1}{4665600} A_1^5 (m-1)(62m^3 - 371m^2 + 757m - 610) \\ A_6 &= -\frac{1}{46656000} A_1^6 (m-1)(32m^4 - 257m^3 + 810m^2 \\ &\quad - 1171m + 730) \\ A_7 &= \frac{1}{740710656000} A_1^7 (m-1)(25742m^5 - 263609m^4 \\ &\quad + 1108202m^3 - 2419211m^2 + 2737856m - 1383380) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.20)$$

Az $A_1 = 1$ választással a (3.18)-(3.19) rendszerből meghatározható numerikusan d és α értéke. A két paraméterérték behelyettesítésével a (3.17) formulában szereplő valamennyi konstans előállítottuk az m paraméterrel.

3.1. táblázat. A d , α és ζ konstansok értékei különböző m kitevőkre

m	d	α	$\zeta = f'(0)$
-0,7	-3,647038235	1,151595555	2,124598444
-0,6	-2,965760980	1,127415834	1,983315576
-0,5	-2,637757681	1,06387919	1,732325541
-0,4	-2,376172862	1,033354073	1,593916052
-0,3	-2,162310710	1,014414456	1,494034266
-0,2	-1,984074328	1,001820070	1,415321059
-0,1	-1,833183771	0,9933978501	1,350675806
0	-1,703758050	0,9879394966	1,296185235
0,1	-1,591498354	0,9846733013	1,249367842
0,2	-1,493186863	0,9830710732	1,208532122
0,3	-1,406365745	0,9827560858	1,172472117
0,4	-1,329124551	0,9834517804	1,140299628
0,5	-1,259955423	0,9849505390	1,111343438
0,6	-1,197652064	0,9870936108	1,085085341
0,7	-1,141237758	0,9897577103	1,061117897
0,8	-1,089913110	0,9928458034	1,039115668
0,9	-1,043017465	0,9962806209	1,018815071
1	-1	1	1

A 3.1 táblázat tartalmazza d , α és $f'(0)$ számított értékeit, ha az m értéke $-0,7$ és 1 között változik. A 3.2 ábra szemlélteti az $f'(0)$ változását m függvényében.

Az alábbiakban megadjuk $f(\eta)$ és $f'(\eta)$ függvényeket exponenciális sor alakban néhány rögzített m értékre, ha $m = -0,5$; $m = 0$; $m = 1$:

$$m = -0,5 :$$

$$\begin{aligned} f(\eta) &= 2,127758380 - 2,806255505(e^{-1,06387919\eta}) \\ &\quad + 0,9252777520(e^{-1,06387919\eta})^2 - 0,3389803468(e^{-1,06387919\eta})^3 \\ &\quad + 0,1266709685(e^{-1,06387919\eta})^4 - 0,0475640067(e^{-1,06387919\eta})^5 \\ &\quad + 0,0178818374(e^{-1,06387919\eta})^6 - 0,0067242990(e^{-1,06387919\eta})^7 \\ &\quad + 0,0025284943(e^{-1,06387919\eta})^8 - 0,0009506669(e^{-1,06387919\eta})^9 \\ &\quad + 0,0003573924(e^{-1,06387919\eta})^{10} \\ f'(\eta) &= 2,985516834(e^{-1,06387919\eta}) \\ &\quad - 1,968767491(e^{-1,06387919\eta})^2 + 1,081902410(e^{-1,06387919\eta})^3 \\ &\quad - 0,5390504296(e^{-1,06387919\eta})^4 + 0,2530117851(e^{-1,06387919\eta})^5 \\ &\quad - 0,1141446885(e^{-1,06387919\eta})^6 + 0,0500768928(e^{-1,06387919\eta})^7 \\ &\quad - 0,0215201002(e^{-1,06387919\eta})^8 + 0,0091025525(e^{-1,06387919\eta})^9 \\ &\quad - 0,0038022244(e^{-1,06387919\eta})^{10} \end{aligned}$$

$$m = 0 :$$

$$\begin{aligned} f(\eta) &= 1,481909245 - 1,683209870(e^{-0,9879394966\eta}) \\ &\quad + 0,2389818639(e^{-0,9879394966\eta})^2 - 0,0452408082(e^{-0,9879394966\eta})^3 \\ &\quad + 0,0090996503(e^{-0,9879394966\eta})^4 - 0,0018543524(e^{-0,9879394966\eta})^5 \\ &\quad + 0,0003780882(e^{-0,9879394966\eta})^6 - 0,0000768915(e^{-0,9879394966\eta})^7 \\ &\quad + 0,0000155922(e^{-0,9879394966\eta})^8 - 0,0000031540(e^{-0,9879394966\eta})^9 \\ &\quad + 0,0000006368(e^{-0,9879394966\eta})^{10} \\ f'(\eta) &= 1,662909512(e^{-0,9879394966\eta}) \\ &\quad - 0,4721992446(e^{-0,9879394966\eta})^2 + 0,1340855441(e^{-0,9879394966\eta})^3 \\ &\quad - 0,0359596159(e^{-0,9879394966\eta})^4 + 0,0091599401(e^{-0,9879394966\eta})^5 \\ &\quad - 0,0022411701(e^{-0,9879394966\eta})^6 + 0,0005317494(e^{-0,9879394966\eta})^7 \\ &\quad - 0,0001232335(e^{-0,9879394966\eta})^8 + 0,0000280445(e^{-0,9879394966\eta})^9 \\ &\quad - 0,0000062914(e^{-0,9879394966\eta})^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 1 : \\ f(\eta) &= 1 - e^{-\eta} \\ f'(\eta) &= e^{-\eta} \end{aligned}$$

Látható, hogy $m = 1$ esetén a numerikus megoldás megegyezik a (3.15) egzakt megoldással. Az m hatványkitevő változásának az $f'(\eta)$ sebességprofilra gyakorolt hatását a 3.3 ábra szemlélteti. Megfigyelhető (3.2 ábra ábra), hogy az m növekedésével az $f'(0) = \zeta$ értéke csökken.

Alkalmazva az $f'(\eta)$ -ra előállított sormegoldást a Θ -ra fölírt (3.13) másodrendű lineáris differenciálegyenletre, az előzőekhez hasonló módon meghatározható a hőmérsékletprofil adó hőmérsékleti hasonlósági függvény. Első lépésként a $\Theta(\eta)$ függvényt definiáljuk a következő alakban:

$$\Theta(\eta) = B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i d^i e^{-\alpha \eta i},$$

ahol a B_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) együtthatókat kell meghatároznunk a (3.13) differenciálegyenletből a (3.14)-beli feltételek figyelembevételével. A számított együtthatók az alábbiak:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 B_0 \frac{Pr}{Pr - 1} (m + 1) \\ B_2 &= \frac{1}{12} \frac{A_1^2 B_0 Pr}{(Pr - 1)(Pr - 2)} (3m^2 Pr + m^2 + 6mPr + 3Pr - 1) \\ B_3 &= -\frac{1}{216} \frac{A_1^3 B_0 Pr}{(Pr - 1)(Pr - 2)(Pr - 3)} F(Pr, m) \\ F(Pr, m) &= ((m^3 - m)(3Pr^2 - 19Pr - 2) \\ &\quad + (m^2 - 1)(4Pr^2 - 20Pr + 4)) \\ &\quad \vdots \end{aligned} \tag{3.21}$$

Megjegyezzük, hogy a B_0 függvényében fölírt együtthatókat csak nem egész értékű Prandtl-számokra tudjuk meghatározni. A (3.14)-ben felírt második peremfeltétel automatikusan teljesül, az első feltételből pedig a B_0 értéke határozható meg a

$$B_0 + B_1 d + B_2 d^2 + B_3 d^3 + \dots = 1$$

egyenletből és a (3.21) képletekből (lásd 2. táblázat).

3.2. táblázat. B_0 értékei különböző m kitevőkre és Prandtl-számokra

$Pr \setminus m$	-0,5	0	1
0,27	0,6993601033	0,6177162887	0,5563436126
0,7	0,2618673398	0,1874641884	0,1444444444
2,5	-6,868890324	0,7323522340	0,1666666666
5,5	-0,0101011911	-0,0203388146	2,100000049
70	-129,5918440	90,92275412	391/6
298	-521,5866457	-253,8172206	7326/25

A $\Theta(\eta)$ sor első tíz tagja $Pr = 298$ Prandtl-szám esetén a vizsgált három különböző m értékre ($m = -0,5$; $m = 0$; $m = 1$) az alábbi:

$$m = -0,5 :$$

$$\begin{aligned} \Theta(\eta) = & -521,5866457 + 690,2257842(e^{-1,06387919\eta}) \\ & -228,3499003(e^{-1,06387919\eta})^2 + 83,59931856(e^{-1,06387919\eta})^3 \\ & -31,32427417(e^{-1,06387919\eta})^4 + 11,72818950(e^{-1,06387919\eta})^5 \\ & -4,437848713(e^{-1,06387919\eta})^6 + 1,649735001(e^{-1,06387919\eta})^7 \\ & -0,6357069408(e^{-1,06387919\eta})^8 + 0,2268403841(e^{-1,06387919\eta})^9 \\ & -0,09549145798(e^{-1,06387919\eta})^{10} \end{aligned}$$

$$m = 0 :$$

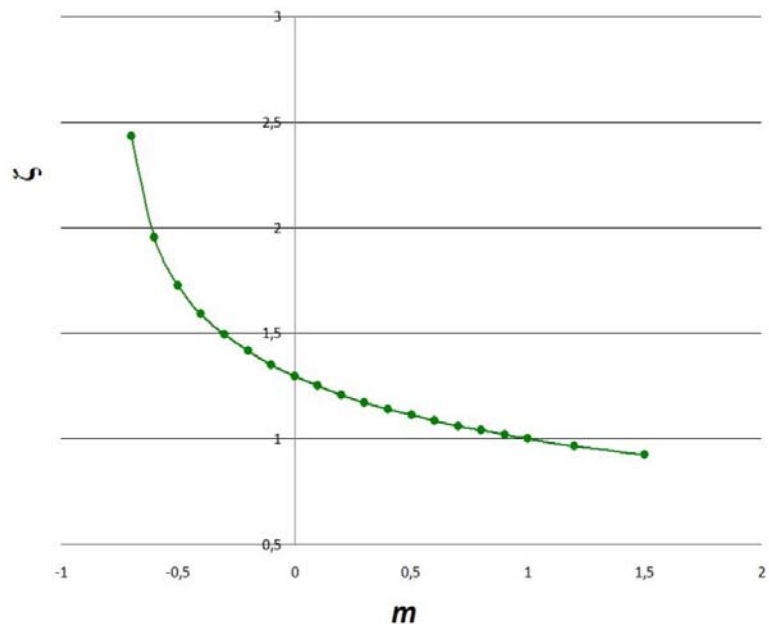
$$\begin{aligned} \Theta(\eta) = & -253,8172206 + 433,8991704(e^{-0,9879394966\eta}) \\ & -185,8554249(e^{-0,9879394966\eta})^2 + 23,32308704(e^{-0,9879394966\eta})^3 \\ & -11,64354979(e^{-0,9879394966\eta})^4 - 0,6456997006(e^{-0,9879394966\eta})^5 \\ & -1,774772066(e^{-0,9879394966\eta})^6 - 0,8708402162(e^{-0,9879394966\eta})^7 \\ & -0,6992264953(e^{-0,9879394966\eta})^8 - 0,5109496856(e^{-0,9879394966\eta})^9 \\ & -0,4045737228(e^{-0,9879394966\eta})^{10} \end{aligned}$$

$$m = 1 :$$

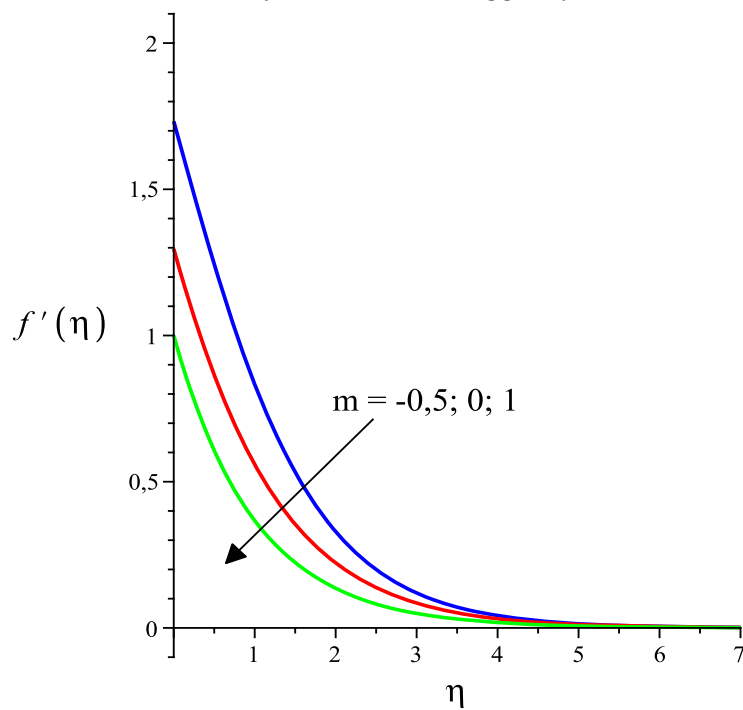
$$\Theta(\eta) = \frac{7326}{25} - \frac{44104}{75}(e^{-\eta}) + \left(\frac{22201}{75}\right)(e^{-\eta})^2$$

A választott $Pr = 298$ érték a transzformátor olaj Prandtl-számának felel meg.

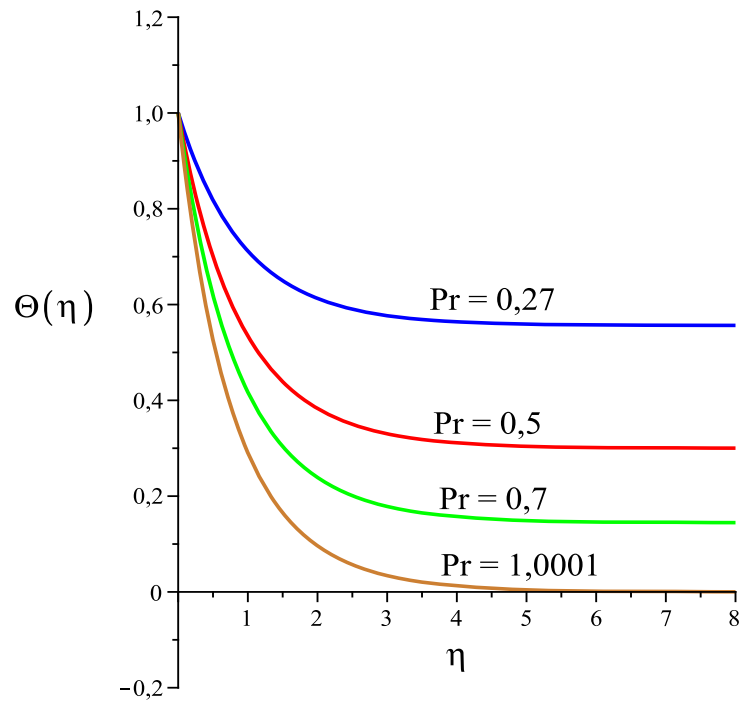
Az m hatványkitevőnek az f' -re, illetve az m hatványkitevőnek és a Prandtl-számnak a Θ -ra gyakorolt hatását mutatjuk be a 3.2-3.12. ábrákon.



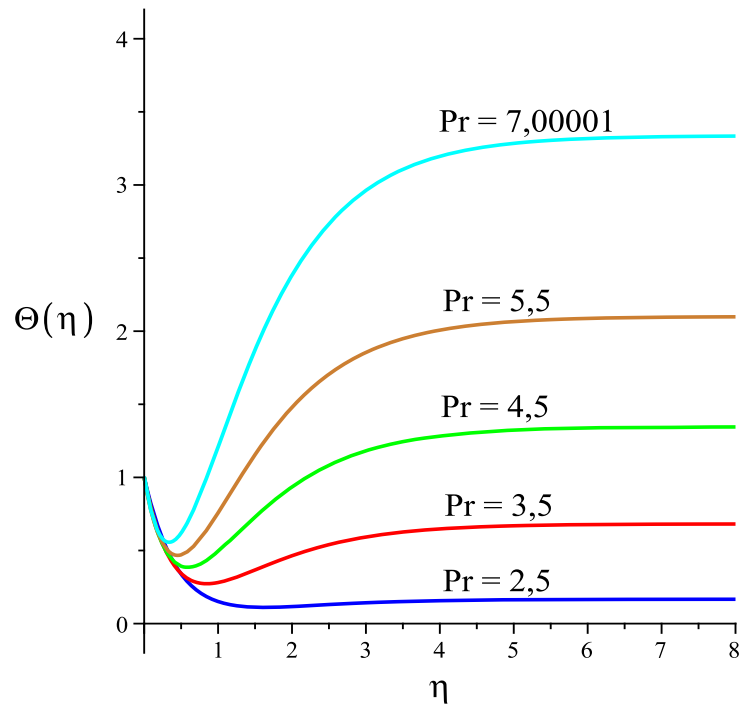
3.2. ábra. ζ változása m függvényében



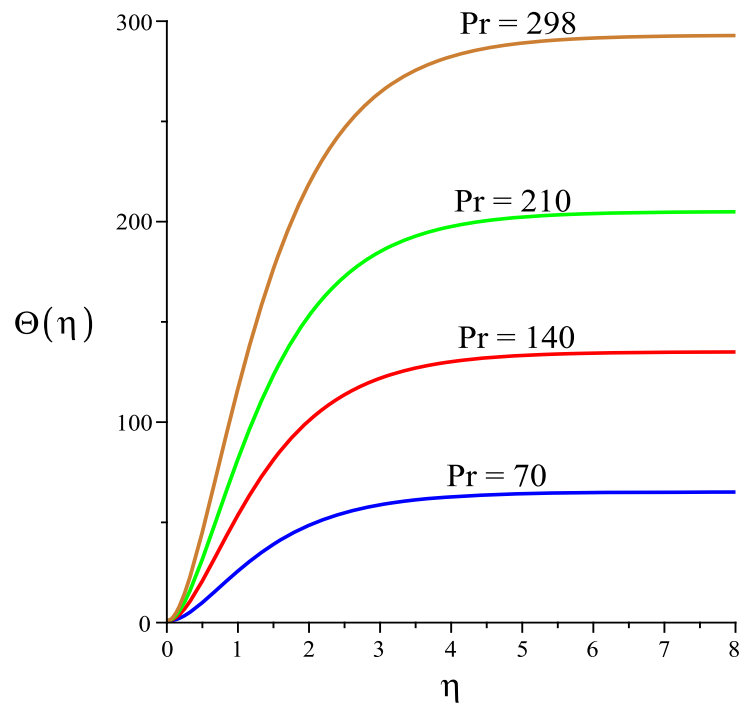
3.3. ábra. f' változása η függvényében



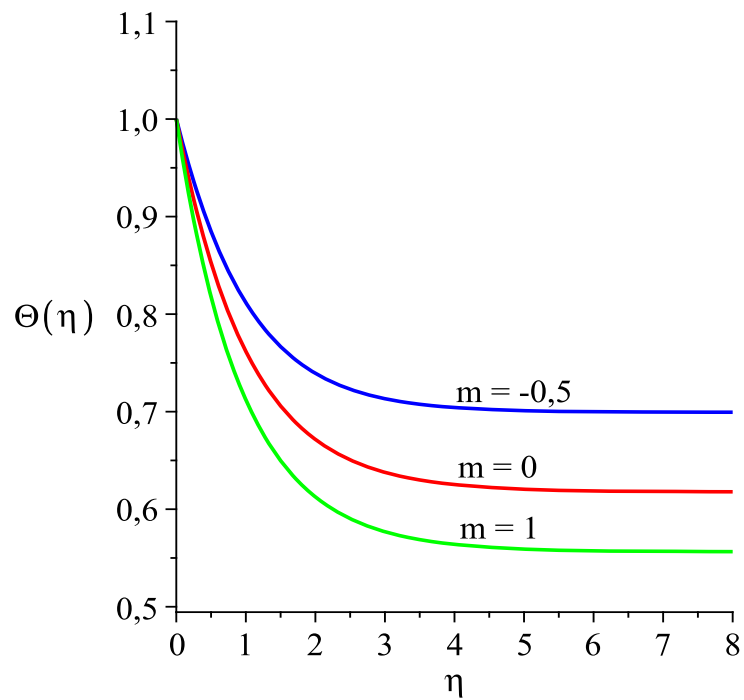
3.4. ábra. θ változása $m = 1$ esetén



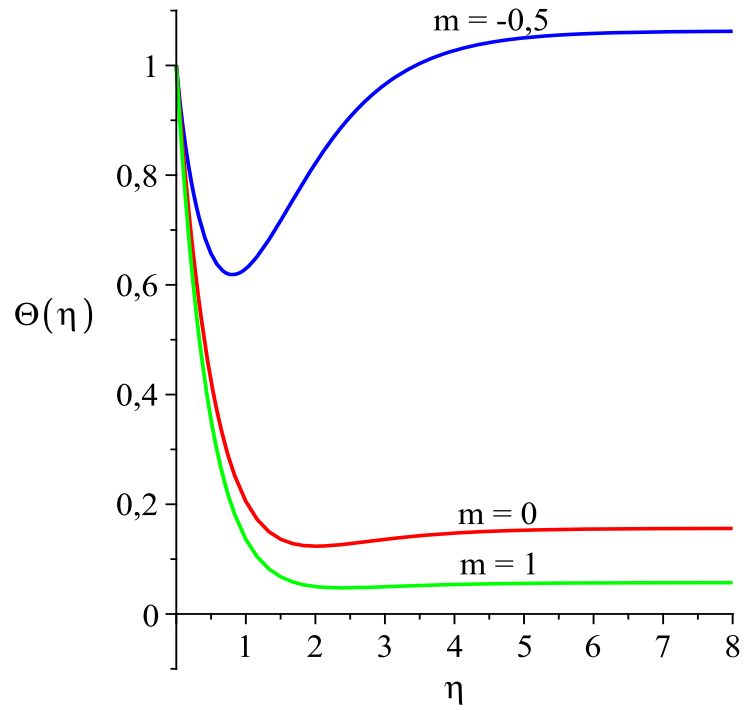
3.5. ábra. θ változása $m = 1$ esetén



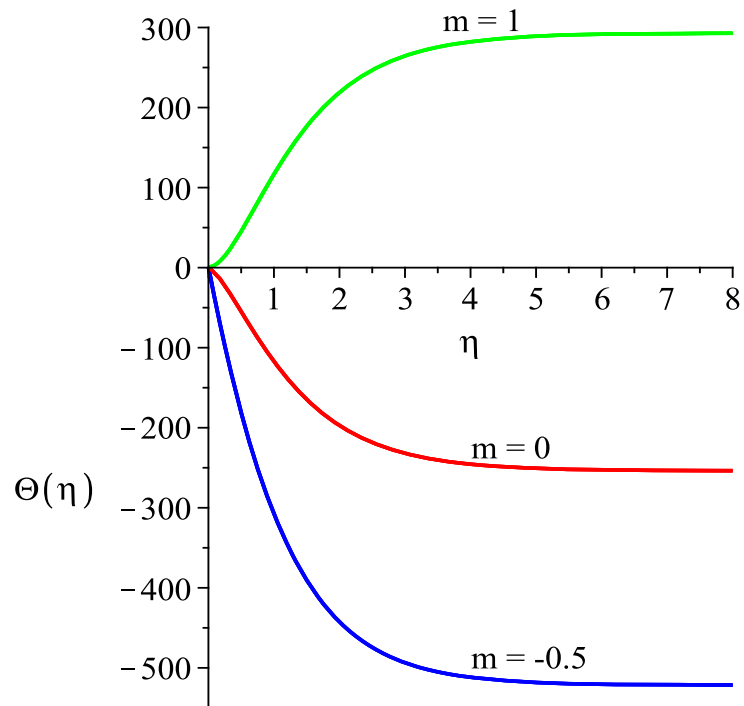
3.6. ábra. θ változása $m = 1$ esetén



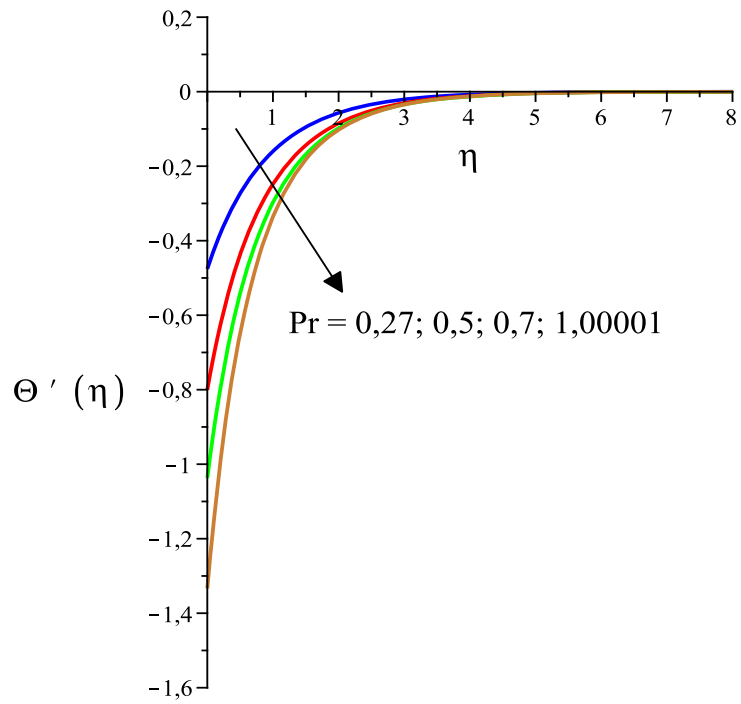
3.7. ábra. θ változása $Pr = 0.27$ esetén



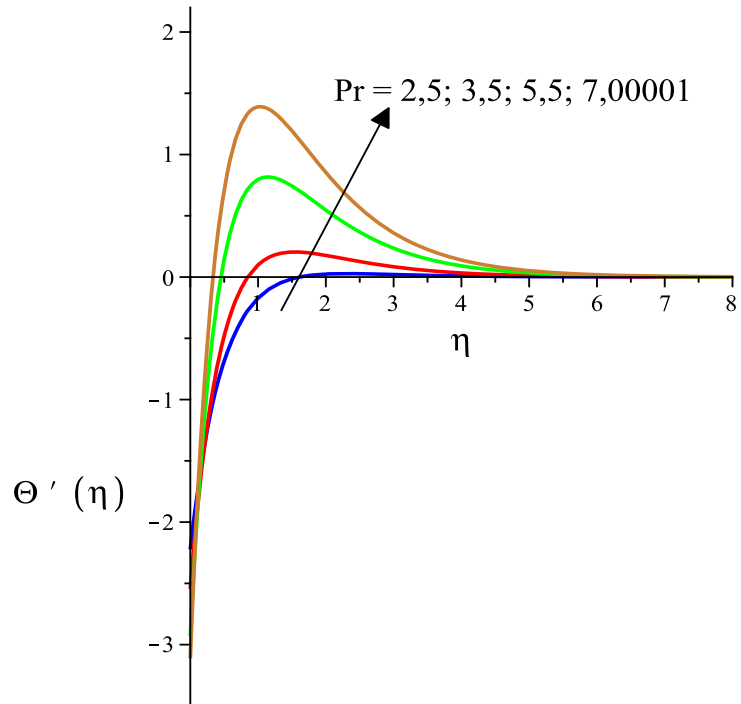
3.8. ábra. θ változása $Pr = 2.2$ esetén



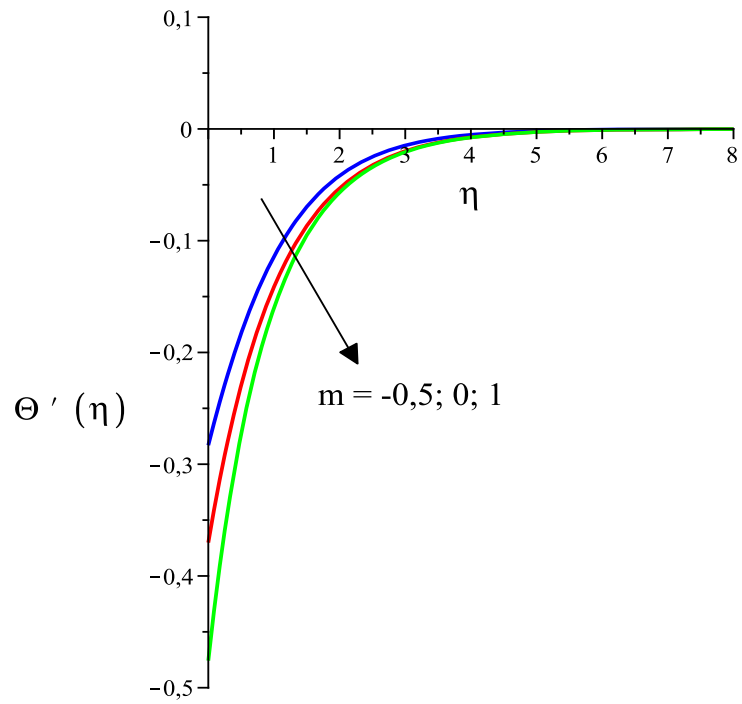
3.9. ábra. θ változása $Pr = 298$ esetén



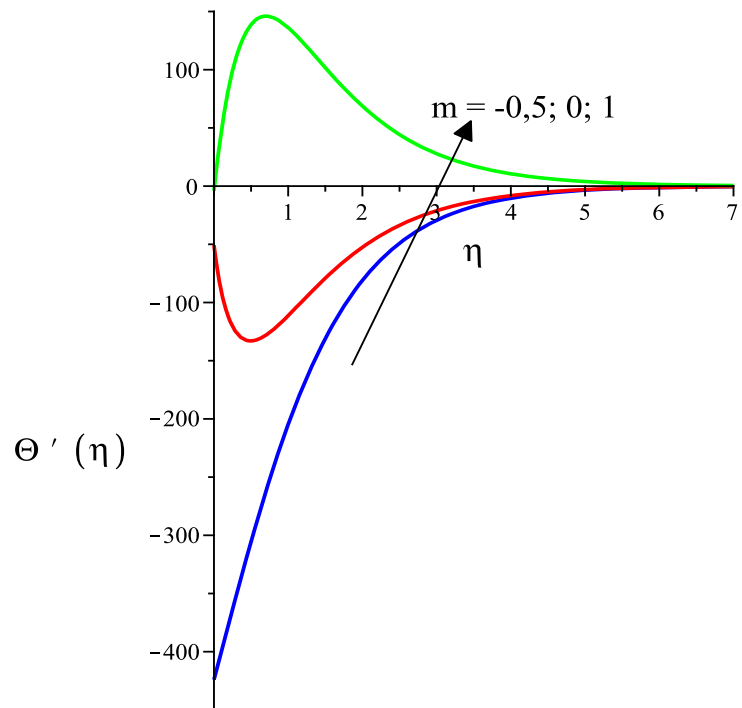
3.10. ábra. θ' változása $m = 1$ esetén



3.11. ábra. θ' változása $m = 1$ esetén



3.12. ábra. θ' változása $Pr = 0.27$ esetén



3.13. ábra. θ' változása $Pr = 298$ esetén

4. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS MOZGÓ, ÁTERESZTŐ SÍKLAP FÖLÖTT

4.1. BEVEZETÉS

A folyadékmechanikában klasszikus jelenségnek számító síklap fölötti szabad áramlás hasonlósági megoldását elsőként Blasius írta le 1908-ban [12]. Azóta számos tudományos dolgozatban vizsgálták a jelenséget különböző aspektusokból és széles körben alkalmazzák a műszaki gyakorlatban ([1], [28], [30], [35], [34], [40]). A magas hőmérséklet-változással járó folyamatokban a konvektív hőátadás fontos szerepet játszik, például atomerőművek, gázturbinák vagy termikus energiatárolás esetén [7], a mozgó és porózus síklap elmélete a bevonatos műanyaglemez táblák előállításánál is alkalmazható.

Napjainkban sokan vizsgálják newtoni folyadékok síklap fölötti hidrodinamikai és termikus határréteg áramlását különböző peremfeltételek mellett, amikor a peremfeltételek a síklap mozgását, porozitását és konvektív hőátadását írják le (lásd [1], [14], [15], [16], [17], [28], [30]). Ilyen konvektív hőátadási feladatok hasonlósági megoldásait állította elő Aziz [7] és Magyarai [48] nem áteresztő síklap esetén, illetve Ishak [40] áteresztő síklapra.

Célunk Aziz [7] eredményeinek általánosítása nem-newtoni folyadék hidrodinamikai és termikus határréteg áramlására, mozgó és áteresztő síklap fölött.

Jelölések

a, b [-]	konstansok
\bar{a} [-]	hőátadással arányos együttható
f [-]	hasonlósági függvény
f_w [-]	áteresztő képesség
h_f [$Wm^{-2}K^{-1}$]	hőátadási együttható
k [$Wm^{-1}K^{-1}$]	hővezetési tényező
K [$Pa s^n$]	konzisztencia index
n [-]	hatványkitevő
Pr [-]	Prandtl-szám
Re_x [-]	helyi Reynolds-szám
T_f [K]	áramló folyadék hőmérséklete
T_w [K]	síklap hőmérséklete
T_∞ [K]	fűtő közeg hőmérséklete
U_w [ms^{-1}]	síklap sebessége
u, v [ms^{-1}]	x és y irányú sebesség koordináták
$v_w(x)$ [m^2]	síklap áteresztő képessége
$w(x, y)$ [-]	dimenziómentes hőmérséklet
x, y [m]	derékszögű koordináták

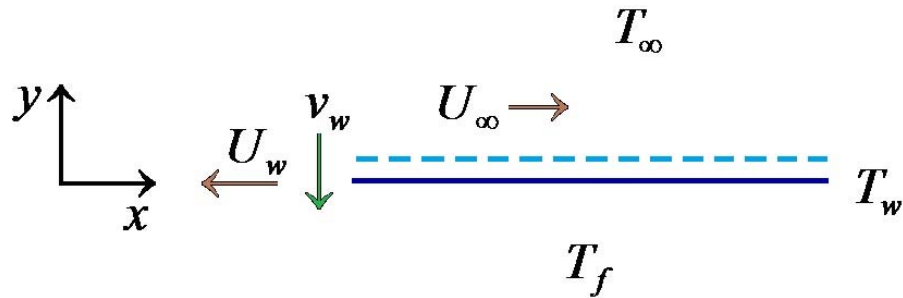
Görög szimbólumok

α, β [-]	konstansok
α_t [m^2s^{-1}]	hődiffúzió
γ [m^2s^{-1}]	kinematikai viszkozitás
η [-]	hasonlósági változó
Θ [-]	hasonlósági függvény
λ [-]	sebesség arány
ρ [kgm^{-3}]	folyadék sűrűsége
τ_{xy} [Pa]	feszültségtenzor eleme
Ψ [m^2s^{-1}]	áramfüggvény
ω [m^2s^{-2}]	hődiffúziós együttható

4.2. A MODELL ALAP EGYENLETEI

Összenyomhatatlan, ρ sűrűségű és T_∞ hőmérsékletű viszkózus folyadék állandósult, kétdimenziós lamináris áramlását vizsgáljuk vízszintes síklap fölött.

Továbbá feltesszük, hogy a nem-newtoni közeg U_∞ állandó sebességgel áramlik a mozgó, áteresztő síklap fölött, melyet aluról konvektív módon melegítünk forró folyadékkal. A síklapot az $y = 0$ síkba helyezzük el.



4.1. ábra. A vizsgált áramlás fizikai modellje

Ezen feltételezéseket figyelembe véve, továbbá a nyomást és a testre ható egyéb erőket elhanyagolva a határréteg áramlást leíró folytonossági, mozgás- és energiaegyenletek a következő alakban írhatók fel [68]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (4.2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_t \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (4.3)$$

ahol az u , v az x és y koordinátáknak megfelelő sebesség komponensek, T a határrétegbeli folyadék hőmérséklete. Továbbá alkalmazva a nyíró feszültség és nyíró sebesség közötti hatványtörvény szerinti összefüggést $\tau_{xy} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y}$, ahol K a nem-newtoni közeg konzisztencia indexe, α_t a hődifúzió és $\gamma = \frac{K}{\rho}$ a kinematikai viszkozitás.

Itt n a hatványfüggvény pozitív kitevője, amely alapján megkülönböztetünk pseudoplasztikus ($n < 1$), newtoni ($n = 1$) és dilatáló ($n > 1$) folyadékot.

A τ_{xy} behelyettesítve a (4.2) mozgásegyenlet az alábbi formába írható:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (4.4)$$

A fent említett fizikai jelenség leírásához az alábbi peremfeltételeket alkalmazzuk. A síklap felületén ($y = 0$): (mozgó, áteresztő síklapot feltételezve és konvektív hőátadás esetén)

$$u(x, 0) = -U_w, \quad (4.5)$$

$$v(x, 0) = v_w(x), \quad (4.6)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h_f(T_f - T_w), \quad (4.7)$$

ahol U_w a mozgó síklap sebessége, $v_w(x)$ a síklap áteresztő képessége, h_f a hőátadási együttható és k a hővezetési tényező.

Távol a síklaptól ($y \rightarrow \infty$):

$$u(x, \infty) = U_\infty, \quad (4.8)$$

$$T(x, \infty) = T_\infty. \quad (4.9)$$

Ha T_w jelöli a síklap hőmérsékletét, akkor fennáll az alábbi reláció a hőmérsékletek között: $T_f > T_w > T_\infty$.

Bevezetjük a Ψ áramfüggvényt a következő formulákkal:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.10)$$

így a (4.1) folytonossági egyenlet automatikusan teljesül. Másrészt a mozgásegyenlet

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (4.11)$$

és a hozzá tartozó (4.5), (4.6), (4.8) feltételek

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = -U_w; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = v_w; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = U_\infty \quad (4.12)$$

alakba írhatóak a Ψ áramfüggvénnyel.

Vezessük be az alábbi dimenziómentes változókat:

$$\eta = a \frac{y}{x^\beta}, \quad (4.13)$$

$$\psi = bx^{-\alpha} f(\eta), \quad (4.14)$$

$$w(x, y) = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}, \quad (4.15)$$

a változóknak szereplő a, b, α, β konstansok.

Béírva az η hasonlósági változót az áramfüggvénybe, adódik

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -bx^{-\alpha-1}[\alpha f + \beta \eta f']; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = abx^{-\alpha-\beta} f' \quad (4.16)$$

ahol a deriváltak η -szerinti deriválást jelölnek. Ezen formulákat behelyettesítve a (4.11), (4.12) összefüggésekbe

$$\left(|f''|^{n-1} f''\right)' - \alpha f f'' + (\alpha + \beta) f'^2 = 0, \quad (4.17)$$

ha $(2-n)\alpha + (2n-1)\beta = 1$ és $\gamma a^{2n-1} b^{n-2} = 1$. Figyelembe véve a (4.8) feltételt adódnak az $ab = U_\infty$ és az $\alpha + \beta = 0$ egyenlőségek. Azért, hogy teljesüljön a (4.12) feltétel, legyen az a, b, α és β az alábbi [18]:

$$\beta = -\alpha = \frac{1}{n+1}, \quad a = \gamma^{-\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2-n}{n+1}}, \quad b = \gamma^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2n-1}{n+1}} \quad (4.18)$$

és

$$\psi(x, y) = \gamma^{\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2n-1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}} f(\eta), \quad \eta = \gamma^{-\frac{1}{n+1}} (U_\infty)^{\frac{2-n}{n+1}} \frac{y}{x^{\frac{1}{n+1}}}. \quad (4.19)$$

A (4.17) egyenlet a hozzá járuló dimenziómentes feltételekkel

$$\left(|f''|^{n-1} f''\right)' + \frac{1}{n+1} f f'' = 0 \quad (4.20)$$

$$f(0) = f_w \quad f'(0) = -\lambda \quad f'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1, \quad (4.21)$$

ahol $f_w = -(n+1)v_w(x^n/\gamma U_\infty^{2n-1})$ formulával számítható, mi azonban konstansnak vesszük föl számításainkban. Megjegyezzük, hogy ha $f_w > 0$, a

felület szívó hatású, míg $f_w < 0$ esetén injektáló a felület és $f_w = 0$ értékre a felület nem áteresztő. A síklap és a fölötte áramló folyadék sebességének arányát jelölje: $\lambda = U_w/U_\infty$. Ezen hányados alapján a síklap $\lambda < 0$ esetén a folyadékkal azonos irányba mozog, $\lambda > 0$ esetén a folyadék áramlási iránya és a síklap mozgásának iránya ellentétes, míg $\lambda = 0$ értékre a síklap rögzített.

Az u és v sebességkomponensek az alábbi formában adódnak a hasonlósági változóval:

$$u(x, y) = U_\infty f'(\eta) \quad (4.22)$$

$$v(x, y) = \frac{U_\infty}{n+1} Re_x^{-\frac{1}{n+1}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \quad (4.23)$$

itt $\eta = Re_x^{\frac{1}{n+1}} \frac{y}{x}$, ahol $Re_x = \frac{U_\infty^{2-n} x^n}{\gamma}$ a helyi Reynolds-számot jelöli.

Definiáljuk a hődiffúziót az $\alpha_t = \omega \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}$ -vel, itt $u \neq 0$, ω pozitív konstans és $u = 0$ esetén $\alpha_t = 0$ (lásd [32], [56], [58], [68]). Ezután a (4.3) energiaegyenletből

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \omega \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (4.24)$$

Bevezetjük a $\Theta(\eta) = w(x, y)$ dimenziómentes hőmérsékletet, így (4.15) miatt a $T = T_\infty + \Theta(\eta)(T_f - T_\infty)$. Ekkor az f és Θ hasonlósági függvényekkel az energiaegyenlet az alábbi formulában adódik:

$$\left(|f''(\eta)|^{n-1} \Theta'(\eta) \right)' + \frac{Pr}{n+1} f(\eta) \Theta'(\eta) = 0, \quad (4.25)$$

ahol $Pr = \frac{K}{\rho\omega}$ a Prandtl-számot jelöli, ahol a K konzisztencia index $n = 1$ esetén a megegyezik a viszkozitással. A (4.25) egyenlethez járuló peremfeltételek az alábbi alakba írhatók:

$$\Theta'(0) = - \left(\frac{\gamma}{U_\infty^{2-n}} x \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{h_f(x)}{k} (1 - \Theta(0)) \quad (4.26)$$

amely az $\bar{a} = \frac{c}{k} \left(\frac{\gamma}{U_\infty^{2-n}} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ helyettesítéssel

$$\Theta'(0) = -\bar{a}(1 - \Theta(0)), \quad (4.27)$$

abban az esetben, ha a hőátadási együttható a $h_f = cx^{-1/(n+1)}$ hatványfüggvény alakú. Megjegyezzük, hogy newtoni folyadék esetén megmutatták a [7],

[9], [40] dolgozatokban, hogy kizárólag $h_f = x^{-1/2}$ esetén ($n = 1$) létezik hasonlósági megoldása a feladatnak.

Ha a kezdeti hőmérséklet egységnyi, azaz $\Theta(0) = 1$, akkor a $\Theta'(0) = 0$ adiabatikus esetet kapjuk, melyet Magyarai vizsgált newtoni folyadékokra [47].

Transzformáljuk a (4.9) peremfeltételt is

$$\Theta(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 0. \quad (4.28)$$

A hasonlósági változóval fölírt (4.20)-(4.21) és (4.25)-(4.28) nemlineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszer peremérték feladatának ismereteink szerint egzakt megoldása nem létezik, azonban numerikus módszerekkel közelítő megoldása előállítható.

MAPLE 12 szoftvert használtunk a numerikus közelítő megoldások előállítására. A szoftverben a Runge-Kutta-Felhberg módszerrel oldottuk meg a peremérték feladatot. A numerikus megoldásokat az alábbi táblázatokban foglaltuk össze, illetve ábrákon szemléltetjük.

A 4.1. és 4.2. táblázatok $-\Theta'(0)$ és $\Theta(0)$ értékeket szemléltetik az \bar{a} változásának függvényében, három választott n hatványkitevő érték mellett ($n = 0, 5; 1; 1, 5$), két rögzített Prandtl-szám ($Pr = 0, 72; 10$) esetén. Az $n = 1$ esetben a kapott numerikus értékek jó egyezést mutatnak Aziz [7] és Ishak [34] cikkeiben közölt értékekkel.

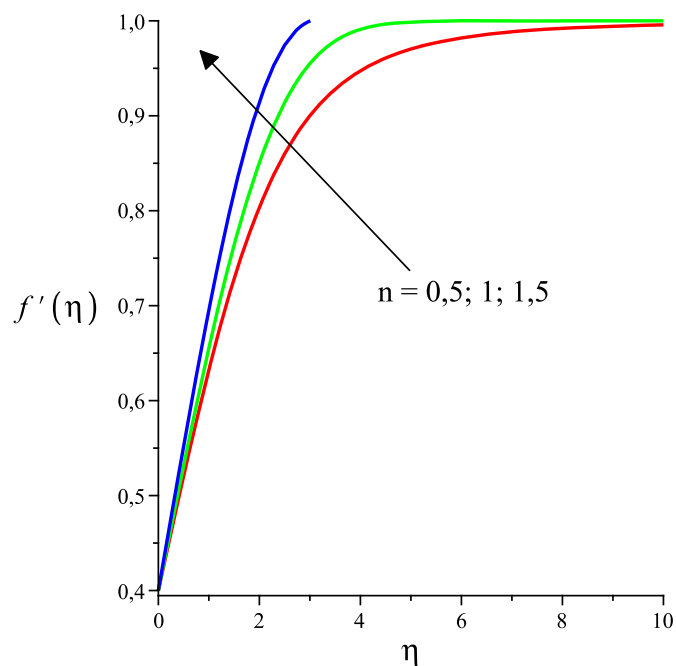
A 4.2-4.7 ábrákon szemléltettük, hogy a hidrodinamikus határréteg vastagságát n növelése jelentősen csökkenti. Továbbá bemutattuk, hogy a termikus határréteg vastagságát és a fal hőmérsékletét a Pr, n, f_w és λ paraméterek növelése csökkenti, az \bar{a} paraméter a termikus határréteg vastagságára nincs hatással, csak a fal menti kezdeti hőmérsékletet növeli.

4.1. táblázat. $-\Theta'(0)$ értékei rögzített n és Pr értékekre, \bar{a} változása mellett

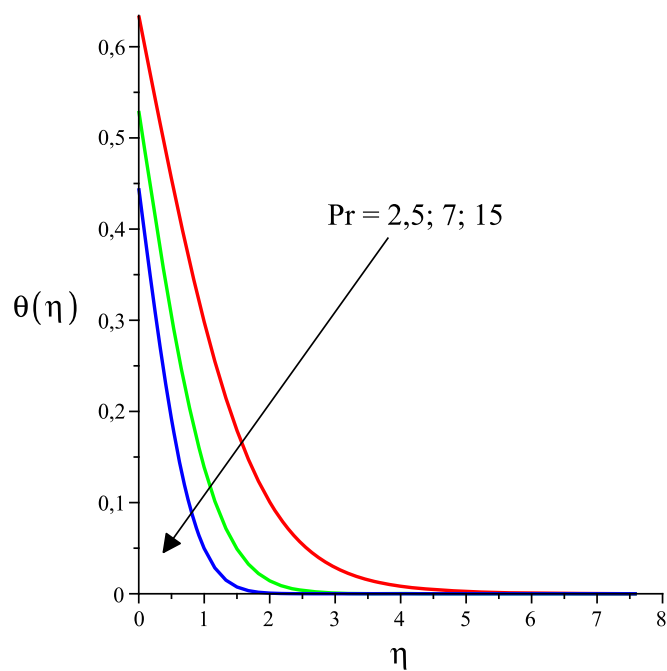
\bar{a}	n = 0,5		n = 1		n = 1,5	
	Pr = 0,72	Pr = 10	Pr = 0,72	Pr = 10	Pr = 0,72	Pr = 10
0,05	0,043392	0,046625	0,042767	0,046787	0,043390	0,047138
0,10	0,076655	0,087355	0,074724	0,087925	0,076647	0,089174
0,20	0,124294	0,155101	0,119295	0,156903	0,124273	0,160928
0,40	0,180329	0,253329	0,169994	0,258174	0,180285	0,269255
0,60	0,212221	0,321120	0,198051	0,328945	0,212159	0,347148
0,80	0,232808	0,370723	0,215864	0,381191	0,232732	0,405853
1	0,247195	0,408591	0,228178	0,421344	0,247110	0,451682
5	0,308129	0,607006	0,279131	0,635583	0,307997	0,707239
10	0,317925	0,646233	0,287146	0,678721	0,317784	0,761065
20	0,323061	0,667811	0,291328	0,702563	0,322915	0,791172

4.2. táblázat. $\Theta(0)$ értékei rögzített n és Pr értékekre, \bar{a} változása mellett

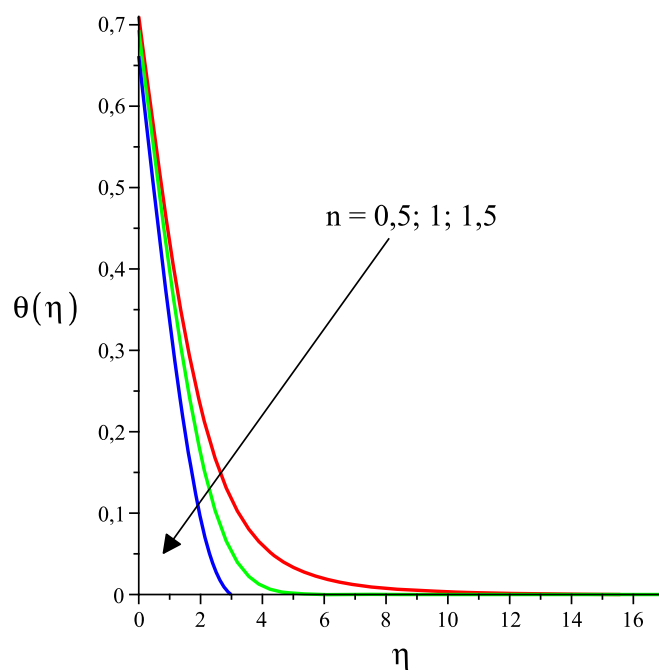
\bar{a}	n = 0,5		n = 1		n = 1,5	
	Pr = 0,72	Pr = 10	Pr = 0,72	Pr = 10	Pr = 0,72	Pr = 10
0,05	0,132148	0,067487	0,144661	0,064256	0,132200	0,057224
0,10	0,233446	0,126441	0,252758	0,120752	0,233528	0,108253
0,20	0,378526	0,224497	0,403523	0,215484	0,378634	0,195359
0,40	0,549175	0,366677	0,575014	0,354566	0,549289	0,326862
0,60	0,646298	0,464799	0,669916	0,451759	0,646402	0,421420
0,80	0,708990	0,536596	0,730170	0,523512	0,709085	0,492684
1	0,752805	0,591408	0,771822	0,578656	0,752890	0,548318
5	0,938374	0,878599	0,944173	0,872883	0,938401	0,858552
10	0,968207	0,935377	0,971285	0,932128	0,968222	0,923894
20	0,983847	0,966609	0,985434	0,964872	0,983854	0,960441



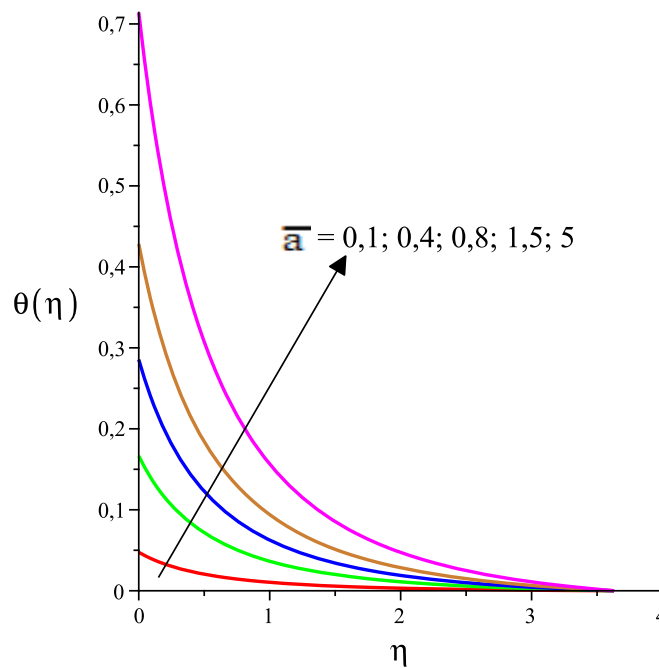
4.2. ábra. Sebességprofil $\lambda = -0,4$, $f_w = 0$ és n változik



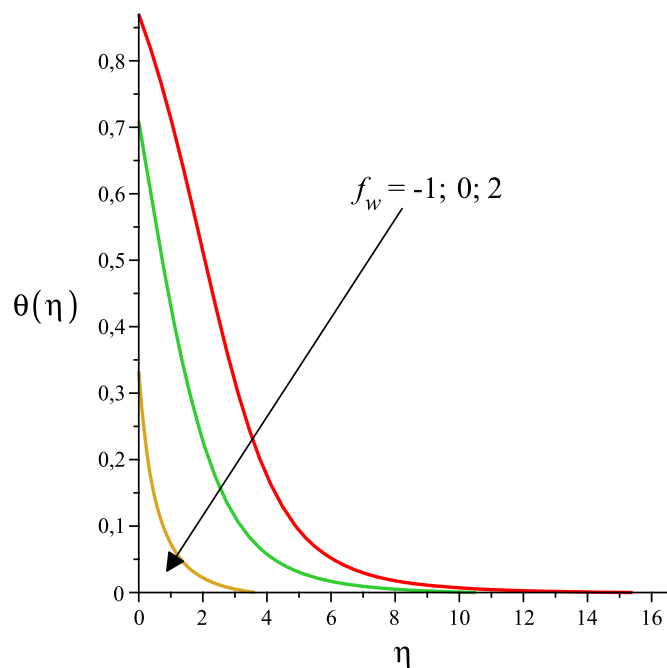
4.3. ábra. Hőmérsékletprofil $n = 0,5$, $\bar{a} = 1$, $\lambda = -0,4$, $f_w = 0$, és Pr változik



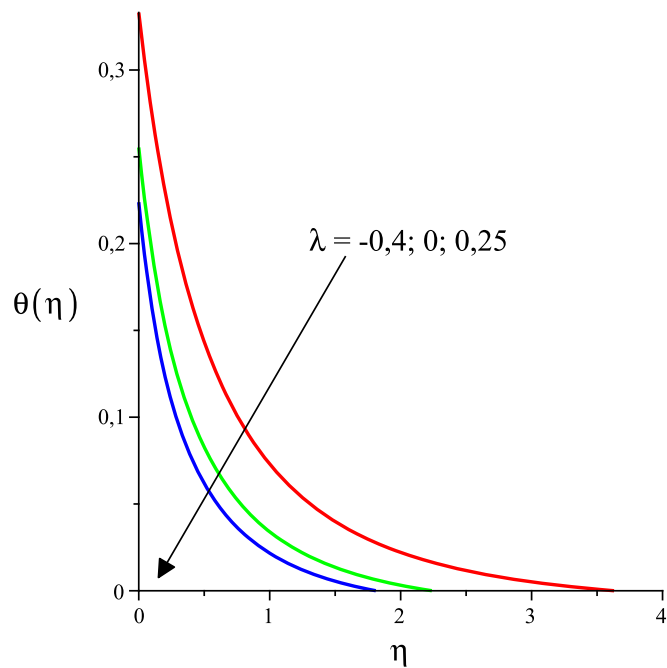
4.4. ábra. Hőmérsékletprofil $Pr = 1$, $\bar{a} = 1$, $\lambda = -0,4$, $f_w = 0$, és n változik



4.5. ábra. Hőmérsékletprofil $n = 0,5$, $Pr = 1$, $\lambda = -0,4$, $f_w = 0$, és \bar{a} változik



4.6. ábra. Hőmérsékletprofil $n = 0,5$, $\bar{a} = 1$, $Pr = 1$, $\lambda = -0,4$ és f_w változik



4.7. ábra. Hőmérsékletprofil $n = 0,5$, $\bar{a} = 1$, $Pr = 1$, $f_w = 2$, és λ változik

5. HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁS PORÓZUS KÖZEGBE HE- LYEZETT FÜGGŐLEGES SÍKLAP MENTÉN

5.1. BEVEZETÉS

Függőleges síklap körüli konvekciót a '70-es években kezdték vizsgálni. Telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap körüli szabad konvektív áramlás vizsgálata fontos szerepet játszik a gyakorlatban. A modell alkalmazható pl. geofizikai és mérnöki problémák leírására. Például Furumoto 1975-ben megjelent tanulmányában azt ismerteti, hogy a vulkanikus régióban kialakított hőhidak segítségével a felszín alatti vizek fűthetőek, melyeket megcsapolás után energiatermelésre használhatunk [31]. Cheng és Minkowycz izotrop tulajdonságú függőleges síklapot modellezett porózus közegben. A lap hőmérsékletét a magasság hatvány függvényével írják le, ami egy szükséges feltétele a hasonlósági megoldásnak [22]. A fent említett kutatási terület napjainkban is népszerű a sokrétű gyakorlati alkalmazhatósága miatt. Ilyen például a hőenergia felhasználása, energiahatékony épületek tervezése, kompakt hőcserélők, napkollektorok és élelmiszeripari alkalmazások. Számos cikk és könyv jelent meg ebben a témában [38], [54]. Célunk Nazar-Arifin-Pop szerzőhármassal 2006-ban megjelent függőleges síklapra vonatkozó vizsgálatának kiterjesztése arra az esetre, amikor a síklap és környező folyadék között nagy a hőmérsékletkülönbség [53].

Jelölések

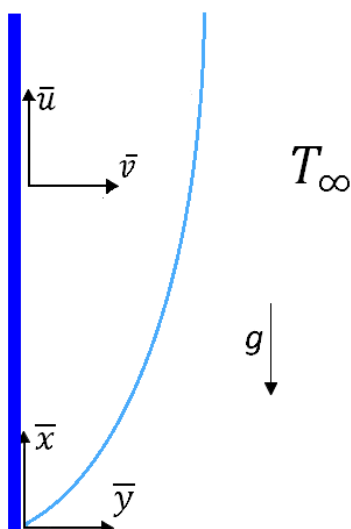
g [ms^{-2}]	gravitációs gyorsulás
K [m^2]	porózus közeg áteresztő képessége
L [m]	referencia hossz
n, m [-]	hasonlósági kitevők
Nu [-]	Nusselt-szám
Ra [-]	Rayleigh-szám
T [K]	folyadék hőmérséklete
T_r [K]	referencia hőmérséklete
T_∞ [K]	környező közeg hőmérséklete
\bar{u}, \bar{v} [ms^{-1}]	az \bar{x} és \bar{y} irányú dimenziós sebesség komponensek
u, v [-]	dimenziómentes sebesség komponensek
\bar{x}, \bar{y} [m]	dimenziós derékszögű koordináták
x, y [-]	dimenziómentes változók

Görög szimbólumok

$\alpha_m [m^2 s^{-1}]$	hőmérséklet-vezetési együttható
$\beta_1, \beta_2 [K^{-1}]$	hőtágulási együtthatók
$\delta [-]$	paraméter
$\varepsilon [-]$	kevert peremfeltétel paramétere
$\eta [-]$	hasonlósági változó
$\nu [m^2 s^{-1}]$	kinematikai viszkozitás
$\rho [kgm^{-3}]$	folyadék sűrűsége
$\rho_\infty [kgm^{-3}]$	környező folyadék sűrűsége
$\Theta [-]$	dimenziómentes hőmérséklet
$\Psi [Pa]$	áramfüggvény

5.2. AZ ÁRAMLÁST LEÍRÓ EGYENLETEK

Tekintsünk egy porózus közegbe helyezett függőleges síklapot. Vizsgáljuk a T_∞ hőmérsékletű folyadékkal telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap mentén kialakuló szabad konvektív áramlást. A mozgási és termikus határrétegeket vizsgáljuk a síklap mentén. Az \bar{x} a síklappal párhuzamos, az \bar{y} pedig az arra merőleges dimenziós koordináta. Az \bar{x} és \bar{y} irányoknak megfelelő dimenziós sebességkoordinátákat az $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y})$ és $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y})$ jelöli (5.1 ábra).



5.1. ábra. Az áramlás fizikai modellje

A szakirodalom alapján a határréteg egyenletek felírásakor az alábbi feltételeket tesszük [45], [62]:

- (i) A konvektív folyadék és a porózus közeg termodinamikai egyensúlyban van;
- (ii) a folyadék hőmérséklete forráspont alatti;
- (iii) a konvektív áramlást a közeg két határa közötti sűrűségkülönbség indukálja;
- (iv) a folyadék viszkozitása, hővezetése, illetve a porózus közeg áteresztő képessége állandó.

Ha az áramlás állandósult és a folyadék sűrűsége konstans, akkor a közeg összenyomhatatlanságát az alábbi folytonossági egyenlettel írjuk föl:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (5.1)$$

Porózus közegben történő áramlás esetén a Naviere-Stokes-egyenletet a Darcy-törvénnyel helyettesítjük. Állandó sűrűséget feltételezünk a közegben, kivéve a síklap mentén. A függőleges síklap és a porózus közeg közötti kis hőmérséklet-változás esetén a folyadék sűrűsége a felhajtóerő, a tehetetlenség, illetve a viszkozitás figyelembevételével a Boussinesq-féle közelítést alkalmazva adható meg:

$$\rho = \rho_{\infty}[1 - \beta_1(T - T_{\infty})], \quad (5.2)$$

ahol ρ a folyadék sűrűsége, T a folyadék hőmérséklete, ρ_{∞} jelöli a környező folyadék sűrűségét, melynek hőmérséklete T_{∞} és β_1 a hőtágulási együtthatója.

Amikor a síklap és a környező folyadék között viszonylag nagy a hőmérsékletkülönbség, akkor a sűrűség leírására nemlineáris közelítést szoktak alkalmazni (see [22], [62], [63]):

$$\rho = \rho_{\infty}[1 - \beta_2(T - T_{\infty})^2], \quad (5.3)$$

itt β_2 a másodfokú közelítés hőtágulási együtthatója. Az (5.2) és (5.3) lineáris és kvadratikus hőmérséklet-változással jellemzett sűrűségi egyenletekhez a Darcy törvény alapján [63] az alábbi mozgás egyenlet járul:

$$\bar{u} = \frac{gK\beta_{\delta}}{\nu}(T - T_{\infty})^{\delta}, \quad (5.4)$$

ahol g a gravitációs gyorsulás, K a porózus közeg áteresztő képessége, ν jelöli a kinematikus viszkozitást, továbbá a $\delta = 1$ esethez a lineáris hőmérsékletfüggés

tartozik az (5.2) egyenlettel, míg a $\delta = 2$ a kvadratikus közelítés esete az (5.3) egyenlettel.

Az energiamegmaradást az alábbi egyenlettel fejezzük ki:

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}, \quad (5.5)$$

itt α_m a folyadékkal telített porózus közeg hőmérséklet-vezetési együtthatója.

Definiáljuk az alábbi dimenziómentes változókat:

$$x = \bar{x}/L, \quad (5.6)$$

$$y = Ra^{1/2}(\bar{y}/L), \quad (5.7)$$

$$u = Ra^{-1}(L/\alpha_m)\bar{u}, \quad (5.8)$$

$$v = Ra^{-1/2}(L/\alpha_m)\bar{v}, \quad (5.9)$$

$$\theta = (T - T_\infty)/(T_r - T_\infty), \quad (5.10)$$

ahol L a síklap hossza, T_r a porózus közeg referencia hőmérséklete,

$$Ra = gK\beta_1(T_r - T_\infty)L/\alpha_m\nu$$

a $\delta = 1$ esethez tartozó Rayleigh-szám, míg $\delta = 2$ esetén

$$Ra = gK\beta_2(T_r - T_\infty)^2L/\alpha_m\nu.$$

Az (5.6)-(5.10) egyenletekkel definiált dimenziómentes változókat behelyettesítve a határréteg áramlást modellező (5.1), (5.4) és (5.5) egyenletekbe, az alábbi dimenziómentes egyenletrendszer írható föl (lásd Pop and Ingham [56]):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.11)$$

$$u = \theta^\delta, \quad (5.12)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (5.13)$$

melyenek keressük a megoldását az következő peremfeltételek mellett:

a síklap mentén ($y = 0$)

$$v(x, 0) = 0, \quad (5.14)$$

$$A(x)(T_r - T_\infty)\theta(x, 0) - B(x)(T_r - T_\infty) \frac{Ra^{1/2}}{L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = C(x), \quad (5.15)$$

és távol a felülettől ($y \rightarrow \infty$)

$$\theta(x, y) \rightarrow 0, \quad (5.16)$$

ahol A , B és C az x függvényei.

Folytatva a modell vizsgálatát bevezetjük a ψ áramfüggvényt a következő formában:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.17)$$

Ezek után az (5.11) folytonossági egyenlet automatikusan teljesül, az (5.12) és (5.13) egyenletekből pedig adódik

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \theta^\delta, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (5.19)$$

Az (5.14) kezdeti feltételre is alkalmazva az áramfüggvényt

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = 0.$$

Most keressük az (5.18) és (5.19) egyenletek hasonlósági megoldását az alábbi alakban:

$$\psi(x, y) = x^p f(\eta), \quad \theta(x, y) = x^q h(\eta), \quad \eta = x^r y. \quad (5.20)$$

Az (5.20) a (5.18) és (5.19) egyenletekbe történt behelyettesítés után:

$$x^{p+r} f' = (x^q h)^\delta, \quad (5.21)$$

$$x^{p-1}(qf'h - pfh') = x^r h'', \quad (5.22)$$

ahol a deriváltak η szerinti deriválást jelölnék.

Most két esetet különböztetünk meg.

1. eset: ($\delta = 1$) Ekkor a kitevők $p = 1 + n$, $q = 1 + 2n$ és $r = n$, így az (5.21) és (5.22) egyenletek a következőképpen írhatóak fel:

$$f' = h, \quad (5.23)$$

$$h'' - (1 + 2n) f'h + (1 + n) fh' = 0. \quad (5.24)$$

A (5.14)-(5.16) peremfeltételek pedig az alábbi alakban:
 $\eta = 0$:

$$f(0) = 0, \quad (5.25)$$

$$a(x)(T_r - T_\infty)h(0) - b(x)(T_r - T_\infty)^{3/2}h'(0) = 1, \quad (5.26)$$

$\eta \rightarrow \infty$:

$$h(\eta) \rightarrow 0, \quad (5.27)$$

ahol az $a(x)$ és $b(x)$ függvényekre a következő formulák érvényesek:

$$a(x) = \frac{A(x)}{C(x)}x^{1+2n}, \quad b(x) = \frac{B(x)}{C(x)}x^{1+3n} \left(\frac{gK\beta}{\alpha_m\nu L} \right)^{1/2}. \quad (5.28)$$

Az (5.23)-(5.24) egyenlet-rendszernek az (5.25)-(5.27) peremfeltételekkel csak akkor van hasonlósági megoldása, ha fenti függvények konstans értékűek. Megadjuk az a , b konstansokat illetve a T_∞ és T_r hőmérsékleteket úgy, hogy teljesítsék az alábbi egyenlőséget:

$$b(T_r - T_\infty)^{3/2} + a(T_r - T_\infty) = 1. \quad (5.29)$$

Amikor $\varepsilon = b(T_r - T_\infty)^{3/2}$, az (5.26) hőmérsékleti peremfeltétel a következő:

$$(1 - \varepsilon)h(0) - \varepsilon h'(0) = 1. \quad (5.30)$$

Megjegyezzük, hogy $\varepsilon = 0$ esetén $\theta(x, 0) = x^{1+2n}$ az előírt felületi hőmérséklet, $\varepsilon = 1$ esetén a $(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = -x^{1+3n}$ a felületen előírt hőfluxus, míg $\varepsilon \rightarrow \infty$ esetén a kevert peremfeltétel adott a $(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = -x^n\theta(x, 0)$ egyenlettel.

2. eset: ($\delta = 2$) Ekkor a kitevők $p = 1 + m$, $q = (1 + 2m)/2$ és $r = m$, ennek megfelelően az (5.21) és (5.22) egyenletek a következők:

$$f' = h^2, \quad (5.31)$$

$$h'' - \frac{1 + 2m}{2}f'h + (1 + m)fh' = 0. \quad (5.32)$$

Az (5.14)-(5.16) peremfeltételek az alábbi formába írhatóak, ha $\eta = 0$:

$$f(0) = 0, \quad (5.33)$$

$$a(x)(T_r - T_\infty)h(0) - b(x)(T_r - T_\infty)^2h'(0) = 1, \quad (5.34)$$

$\eta \rightarrow \infty$:

$$h(\eta) \rightarrow 0, \quad (5.35)$$

ahol $a(x)$ és $b(x)$ adott, mint

$$a(x) = \frac{A(x)}{C(x)} x^{\frac{1+2m}{2}}, \quad b(x) = \frac{B(x)}{C(x)} x^{\frac{1+4m}{2}} \left(\frac{gK\beta}{\alpha_m \nu L} \right)^{1/2}. \quad (5.36)$$

Csak abban az esetben létezik az (5.31)-(5.32) egyenletrendszernek az (5.33)-(5.35) peremfeltételek mellett hasonlósági megoldása, ha az $a(x)$ és $b(x)$ függvények konstans értékűek. Az a , b konstansokat illetve T_∞ és T_r hőmérsékleteket úgy kell megválasztanunk, hogy kielégítsék az alábbi egyenletet:

$$b(T_r - T_\infty)^2 + a(T_r - T_\infty) = 1. \quad (5.37)$$

Bevezetjük az $\varepsilon = b(T_r - T_\infty)^2$ formulát, így az (5.34) hőmérsékleti peremfeltétel az alábbi formába írható:

$$(1 - \varepsilon)h(0) - \varepsilon h'(0) = 1. \quad (5.38)$$

Szükséges megjegyezni, hogy $\varepsilon = 0$ esetén $\theta(x, 0) = x^{(1+2m)/2}$ az előírt felületi hőmérséklet, $\varepsilon = 1$ esetén a $(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = -x^{1/2+2m}$ a felületen előírt hőfluxus, míg $\varepsilon \rightarrow \infty$ esetén a kevert peremfeltétel $(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = -x^m\theta(x, 0)$.

5.3. EGZAKT MEGOLDÁS

Alkalmazva a Boussinesq-féle közelítést, egy esetben, amikor az $n = 0$, létezik egzakt megoldás. Az (5.23), (5.24) közönséges differenciálegyenletrendszernek az (5.25), (5.27) és $h(0) = -h'(0)$ ($\varepsilon \rightarrow \infty$) peremfeltételekkel az alábbi zárt alakú megoldása adható meg:

$$f(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad h(\eta) = e^{-\eta}.$$

Az áramlások komplexitásából adódóan, általánosan nem lehetséges zárt alakú megoldás megadása.

5.4. EREDMÉNYEK

Nazar és szerzőtársai [53] a Keller-box módszerrel oldották meg különböző n paraméter értékekre az (5.23), (5.24) egyenletekből és az (5.25)-(5.27) feltételekből álló peremérték feladatot. Numerikus megoldást állítottunk elő a fent említett két peremérték feladatra MAPLE 12 szimbolikus szoftverrel. A

közelítő megoldásokat a dsolve beépített peremérték feladat megoldó alkalmazásával határoztuk meg. Első megoldandó feladat a lineáris hőmérséklet-sűrűség függésből felírt (5.23), (5.24) egyenletek a hozzátartozó (5.25)-(5.27) feltételekkel. A másik feladatot a kvadratikus hőmérséklet-sűrűség függésre vonatkozó (5.31), (5.32) egyenletek és az (5.33)-(5.35) hozzátartozó feltételek alkotják.

Lineáris hőmérsékletfüggés esetén ($\delta = 1$) végzett számítási eredményeinket foglaltuk össze az (5.1)-(5.3) táblázatokban, ahol az n paraméter változásának ($-2/3 \leq n \leq 1$) hatása figyelhető meg az $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ és $\varepsilon \rightarrow \infty$ esetén, ezen eredményeket összehasonlítva Nazar és szerzőtársai [53] eredményével kiváló egyezőséget mutatnak.

Másodfokú hőmérsékletfüggésre ($\delta = 2$) számított numerikus eredményeket a 5 (5.4) táblázat tartalmazza mindhárom esetre ($\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon \rightarrow \infty$), amikor $-2/3 \leq m \leq 100$. Továbbá az (5.5)-(5.7) táblázatokban megtalálható a $-h'(0)$, $h(0)$ és $h(0) = -h'(0)$ értékek összehasonlítása $\delta = 1$ és $\delta = 2$ esetén.

Numerikus eredményeink csökkenő tendenciája jó egyezést mutat a Nazar és szerzőtársai által publikált eredményekkel [53]. Az 5.5-5.10 ábrákon megfigyelhető, hogy az n vagy m paraméter növelése mellett a sebesség és hőmérséklet profil is csökkenő.

A feladat fizikai aspektusában az Nu Nusselt-szám értéke meghatározó, amely az általunk vizsgált lineáris és másodrendű esetekben az alábbi formulákkal írható föl:

$$Nu = -x^{1+3n} \sqrt{Ra} h'(0) \quad \text{as } \delta = 1$$

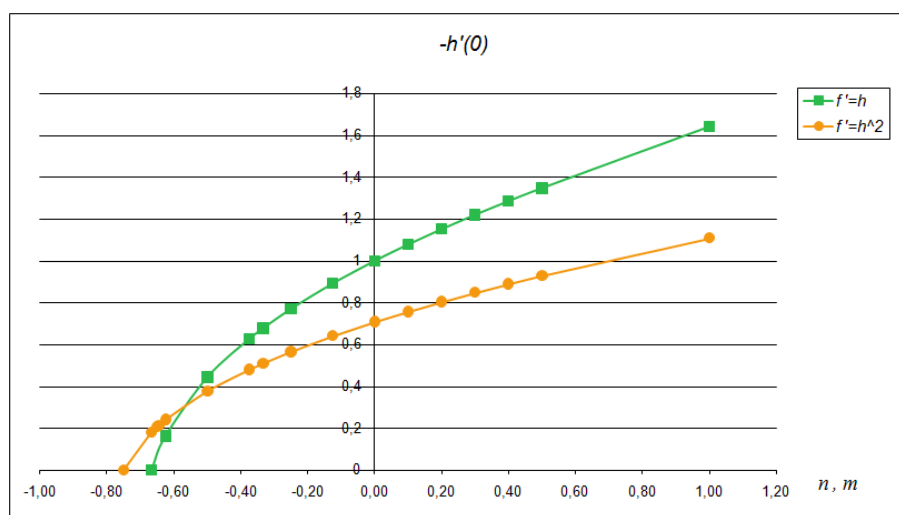
és

$$Nu = -x^{1/2+2m} \sqrt{Ra} h'(0) \quad \text{as } \delta = 2.$$

Számításaink azt mutatják, hogy mindkét esetben - mind az n mind az m paraméterek növekedésével - a Nusselt-szám is növekszik.

5.1. táblázat. Lineáris hőmérsékletfüggés ($\delta = 1$) esetéhez tartozó $-h'(0)$ értékek előírt felületi hőmérséklet ($\varepsilon = 0$) mellett

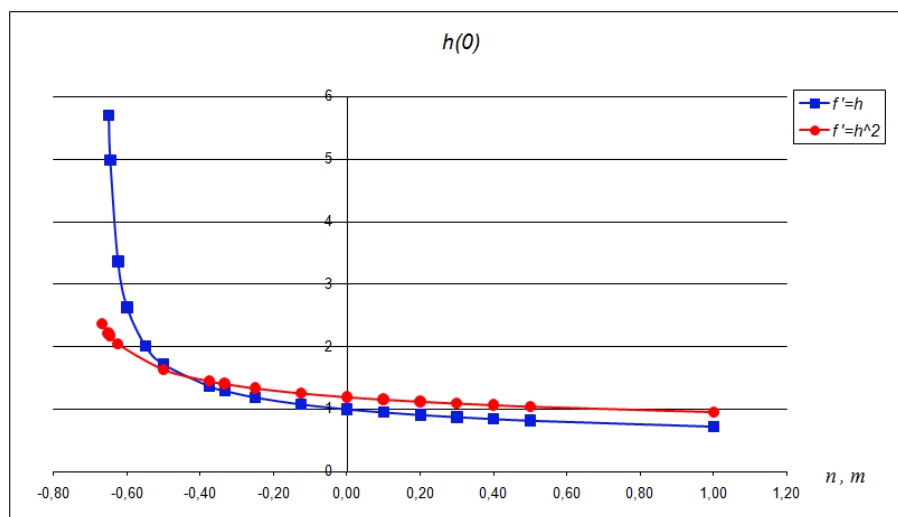
$f' = h$	Nazar és szerzőtársai [53]	Saját számítások
n	$-h'(0)(\varepsilon = 0)$	$-h'(0)(\varepsilon = 0)$
- 2/3	0,0000	0,00000
- 5/8	0,1620	0,16203
- 1/2	0,4437	0,44374
- 3/8	0,6266	0,62655
- 1/3	0,6776	0,67764
- 1/4	0,7704	0,77036
- 1/8	0,8923	0,89234
0	1,0000	1,00000
0,1	1,0786	1,07858
0,2	1,1519	1,15191
0,3	1,2209	1,22090
0,4	1,2862	1,28624
0,5	1,3484	1,34845
1	1,6443	1,64213



5.2. ábra. A $-h'(0)$ értékek változása a $\delta = 1$ és a $\delta = 2$ esetekre, amikor $\varepsilon = 0$

5.2. táblázat. Lineáris hőmérsékletfüggés ($\delta = 1$) esetéhez tartozó $h(0)$ értékek előírt felületi hőfluxus ($\varepsilon = 1$) mellett

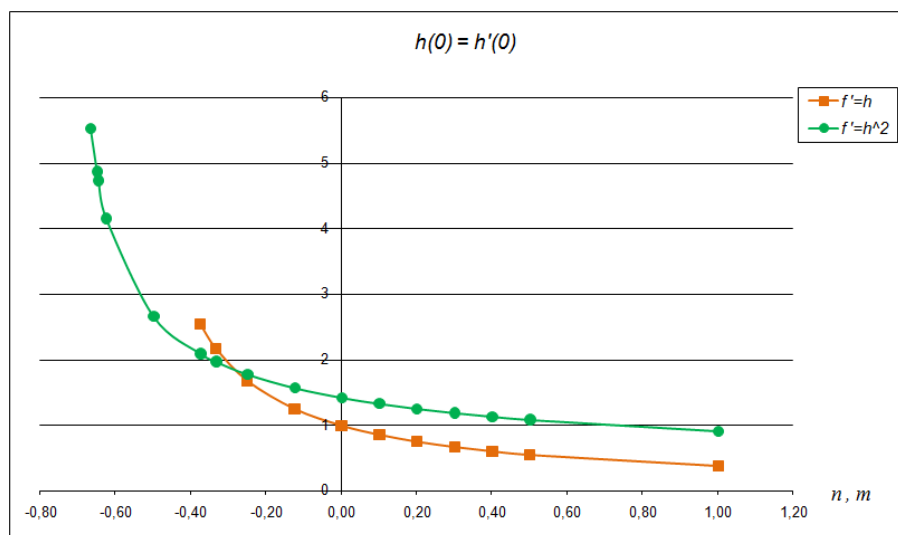
$f' = h$	Nazar és szerzőtársai [53]	Saját számítások
n	$h(0)(\varepsilon = 1)$	$h(0)(\varepsilon = 1)$
- 2/3	-	-
- 5/8	3,3645	3,36454
- 1/2	1,7188	1,71886
- 3/8	1,3657	1,36571
- 1/3	1,2962	1,29617
- 1/4	1,1900	1,18996
- 1/8	1,0789	1,07889
0	1,0000	0,99999
0,1	0,9508	0,95081
0,2	0,9100	0,91002
0,3	0,8754	0,87540
0,4	0,8455	0,84550
0,5	0,8193	0,81929
1	0,7237	0,72367



5.3. ábra. A $h(0)$ értékek változása a $\delta = 1$ és a $\delta = 2$ esetekre, ha $\varepsilon = 1$

5.3. táblázat. Lineáris hőmérsékletfüggés ($\delta = 1$) esetéhez tartozó $h(0)$ értékek kevert hőmérsékleti peremfeltétel ($\varepsilon \rightarrow \infty$) mellett

$f' = h$	Nazar és szerzőtársai [53]	Saját számításaink
n	$h(0) = -h'(0)(\varepsilon \rightarrow \infty)$	$h(0) = -h'(0)(\varepsilon \rightarrow \infty)$
- 2/3	-	-
- 5/8	-	-
- 1/2	-	-
- 3/8	1,9080	2,53540
- 1/3	1,8007	2,16579
- 1/4	1,6735	1,67379
- 1/8	1,2457	1,24596
0	0,9912	0,99136
0,1	0,8516	0,85179
0,2	0,7445	0,74564
0,3	0,6626	0,66438
0,4	0,5968	0,59847
0,5	0,5411	0,54444
1	0,3710	0,37500



5.4. ábra. A $h(0)$ értékek változása a $\delta = 1$ és a $\delta = 2$ esetekre, ha $\varepsilon \rightarrow \infty$

5.4. táblázat. Másodrendű hőmérsékletfüggés ($\delta = 2$) esetéhez tartozó $-h'(0)$ ($\varepsilon = 0$), $h(0)$ ($\varepsilon = 1$) és $h(0) = -h'(0)$ ($\varepsilon \rightarrow \infty$) értékek

$f' = h^2$			
m	$-h'(0)(\varepsilon = 0)$	$h(0)(\varepsilon = 1)$	$h(0) = -h'(0)(\varepsilon \rightarrow \infty)$
- 3/4	0,00004	-	-
- 2/3	0,18029	2,35499	5,51375
- 13/20	0,20572	2,20387	4,86134
- 31/48	0,21177	2,17212	4,72248
- 5/8	0,24042	1,89620	4,14615
- 1/2	0,37653	1,62920	2,64990
- 3/8	0,47946	1,44378	2,07758
- 1/3	0,50952	1,40055	1,95417
- 1/4	0,56514	1,32988	1,76064
- 1/8	0,63993	1,24979	1,55368
0	0,70710	1,18898	1,40533
0,1	0,75665	1,14941	1,31287
0,2	0,80321	1,11562	1,23644
0,3	0,84726	1,08625	1,17191
0,4	0,88915	1,06037	1,11650
0,5	0,92918	1,03729	1,06824
1	1,10798	0,94995	0,89539
1,1	1,14041	0,93635	0,87687
1,3	1,20264	0,91181	0,83149
1,5	1,26182	0,89018	0,79250
2	1,39890	0,84545	0,71484
3	1,63907	0,78107	0,61010
4	1,84833	0,73553	0,54102
5	2,03621	0,70078	0,49110
10	2,79200	0,59846	0,35815
20	3,88522	0,50733	0,25738
50	6,08222	0,40547	0,16441
100	8,57268	0,34154	0,11664

5.5. táblázat. A $-h'(0)$ értékek összehasonlítása a $\delta = 1$ és a $\delta = 2$ esetekre $\varepsilon = 0$ mellett

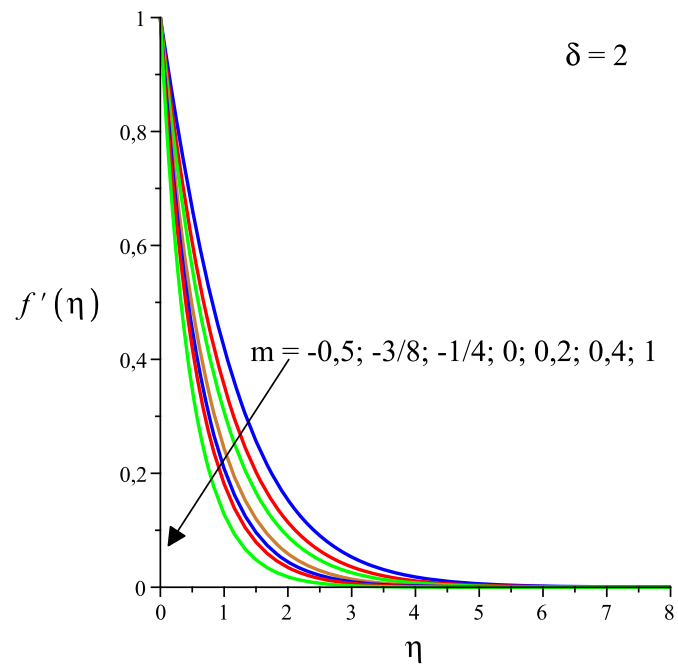
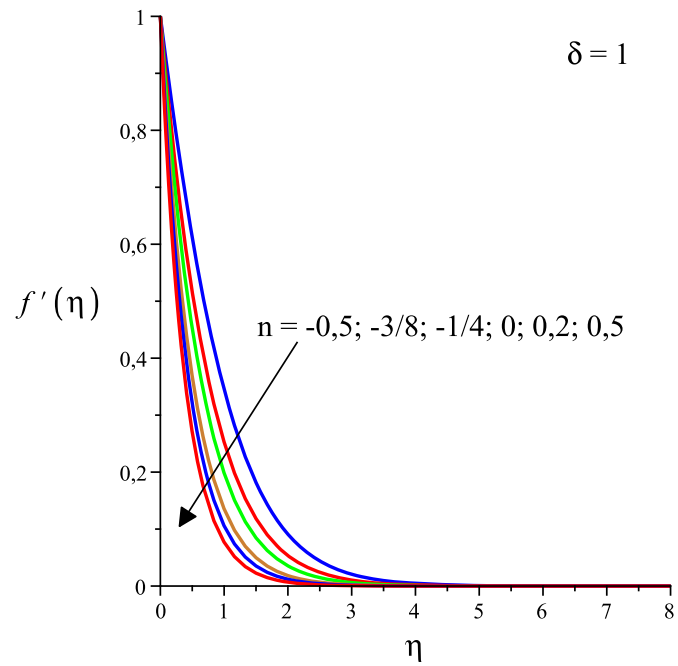
	$f' = h$	$f' = h^2$
n/m	$-h'(0)(\varepsilon = 0)$	$-h'(0)(\varepsilon = 0)$
- 2/3	0,00000	0,18029
- 5/8	0,16203	0,24042
- 1/2	0,44374	0,37653
- 3/8	0,62655	0,47946
- 1/3	0,67764	0,50952
- 1/4	0,77036	0,56514
- 1/8	0,89234	0,63993
0	1,00000	0,70710
0,1	1,07858	0,75665
0,2	1,15191	0,80321
0,3	1,22090	0,84726
0,4	1,28624	0,88915
0,5	1,34845	0,92918
1	1,64213	1,10798

5.6. táblázat. A $h(0)$ értékek összehasonlítása a $\delta = 1$ és a $\delta = 2$ esetekre $\varepsilon = 1$ mellett

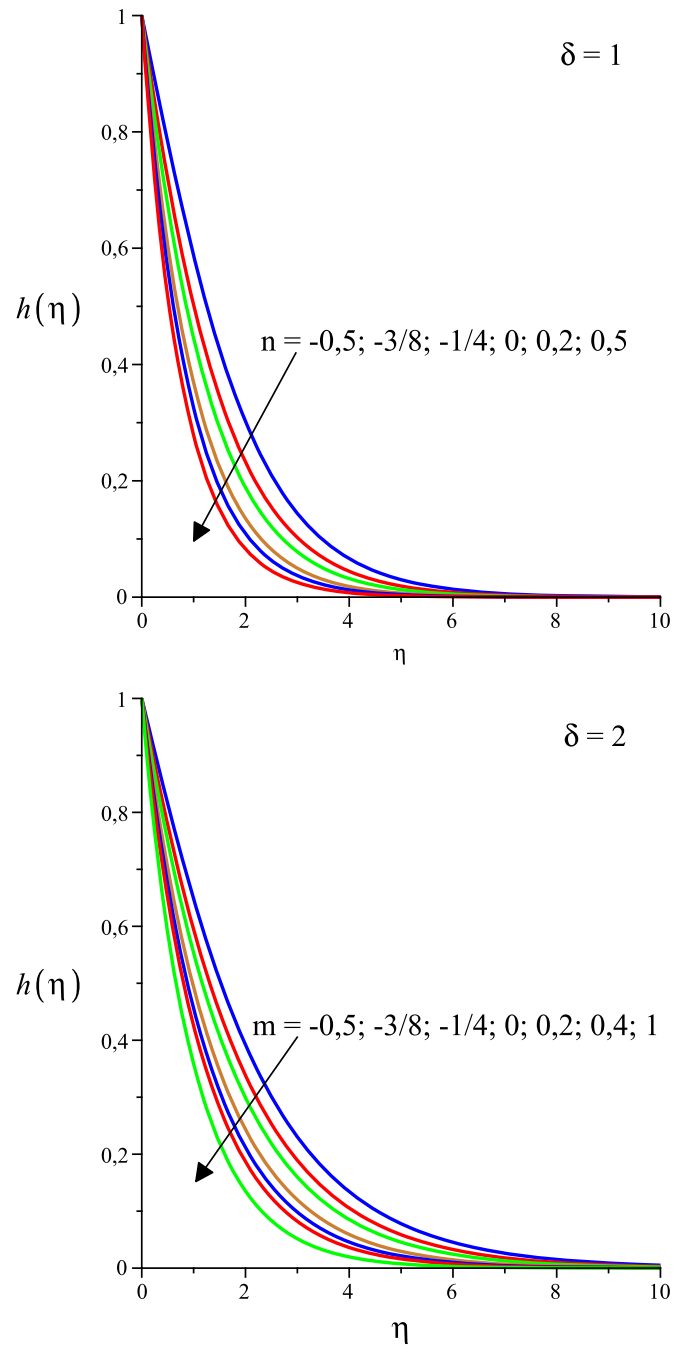
	$f' = h$	$f' = h^2$
n/m	$h(0)(\varepsilon = 1)$	$h(0)(\varepsilon = 1)$
- 2/3	-	2,35499
- 5/8	3,36454	1,89620
- 1/2	1,71886	1,62920
- 3/8	1,36571	1,44378
- 1/3	1,29617	1,40055
- 1/4	1,18996	1,32988
- 1/8	1,07889	1,24979
0	0,99999	1,18898
0,1	0,95081	1,14941
0,2	0,91002	1,11562
0,3	0,87540	1,08625
0,4	0,84550	1,06037
0,5	0,81929	1,03729
1	0,72367	0,94995

5.7. táblázat. A $h(0)$ értékek összehasonlítása a $\delta = 1$ és a $\delta = 2$ esetekre $\varepsilon \rightarrow \infty$ mellett

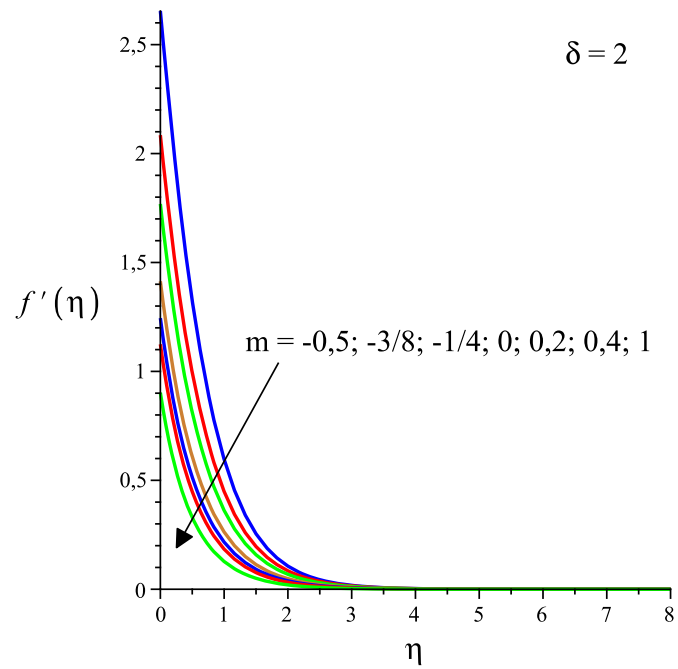
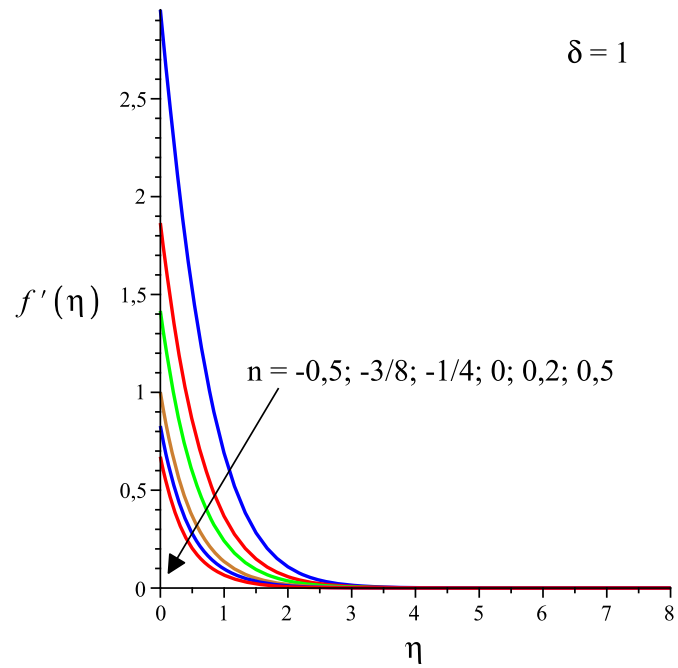
	$f' = h$	$f' = h^2$
n/m	$h(0) = -h'(0)(\varepsilon \rightarrow \infty)$	$h(0) = -h'(0)(\varepsilon \rightarrow \infty)$
- 2/3	-	5,51375
- 5/8	-	4,14615
- 1/2	-	2,64990
- 3/8	2,53540	2,07758
- 1/3	2,16579	1,95417
- 1/4	1,67379	1,76064
- 1/8	1,24596	1,55368
0	0,99136	1,40533
0,1	0,85179	1,31287
0,2	0,74564	1,23644
0,3	0,66438	1,17191
0,4	0,59847	1,11650
0,5	0,54444	1,06824
1	0,37500	0,89539



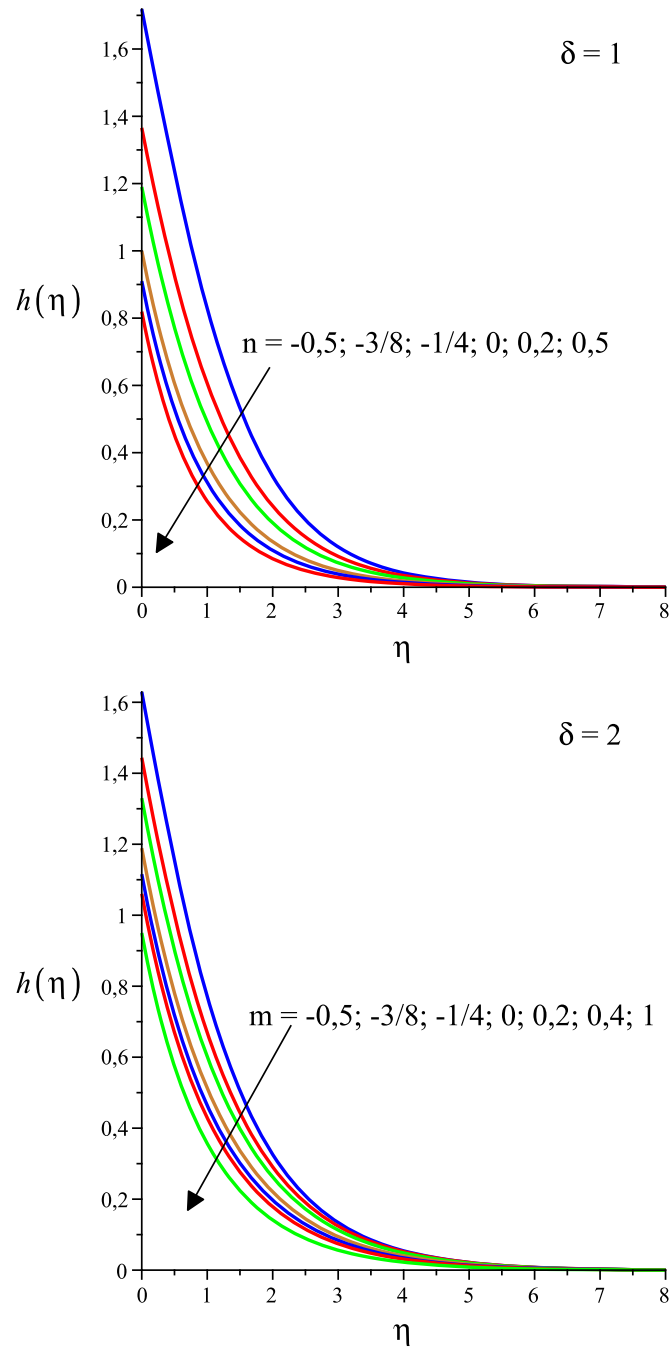
5.5. ábra. Sebességeloszlások $\varepsilon = 0$ esetén



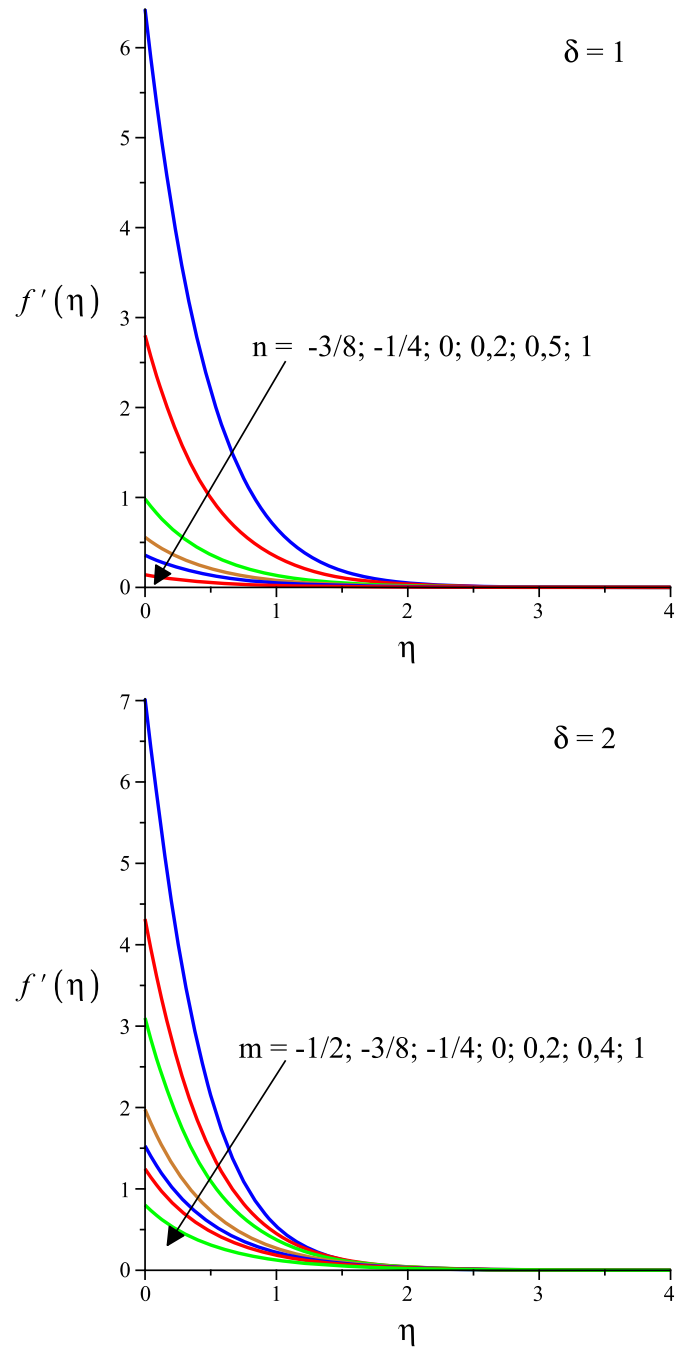
5.6. ábra. Hőmérsékleteloszlások $\varepsilon = 0$ esetén



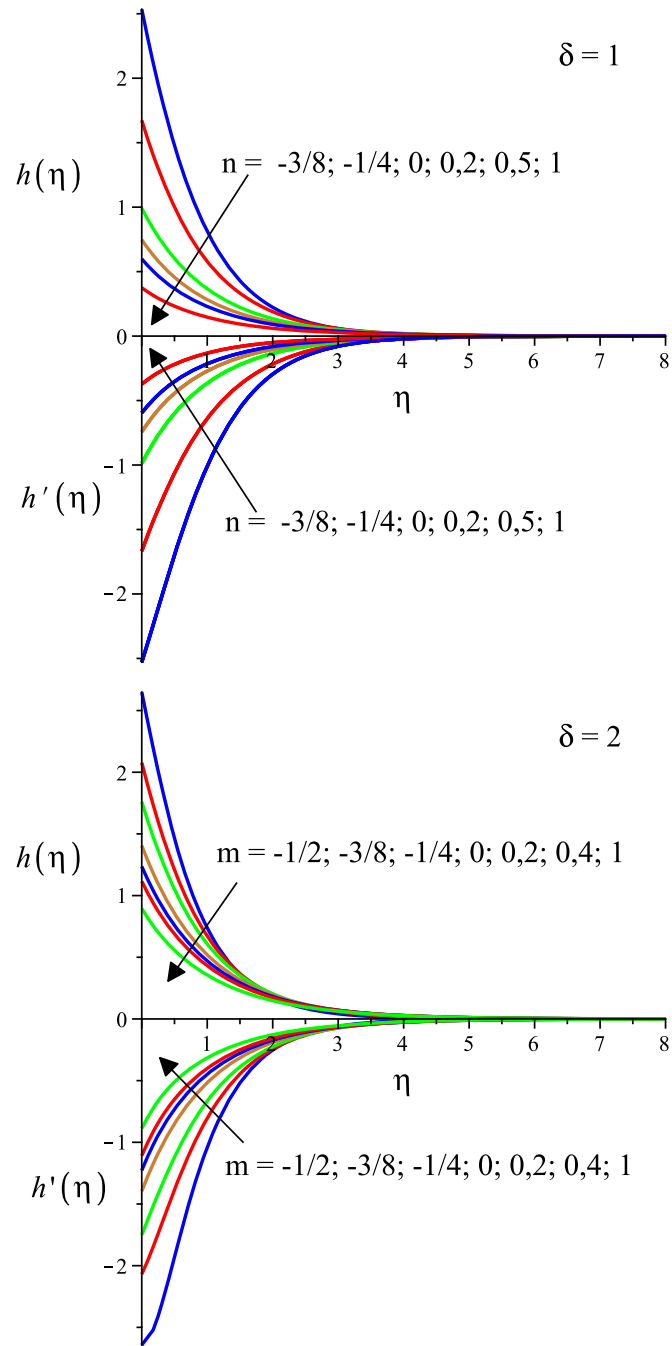
5.7. ábra. Sebességeloszlások $\varepsilon = 1$ esetén



5.8. ábra. Hőmérsékleteloszlások $\varepsilon = 1$ esetén



5.9. ábra. Sebességeloszlások kevert peremfeltétel esetén ($\varepsilon \rightarrow \infty$)



5.10. ábra. Hőmérsékleteloszlások kevert peremfeltétel esetén ($\varepsilon \rightarrow \infty$)

6. ÖSSZEFOGLALÁS, TÉZISEK

6.1. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TERVEZETT KUTATÁSI IRÁNYOK

Az értekezésben négy, a műszaki gyakorlatban előforduló peremérték feladat numerikus és analitikus megoldásának meghatározását mutattam be, amelyek matematikai modelljei newtoni és nem-newtoni folyadékok síklap menti határréteg áramlását írják le.

Elsőként α dőlésszögű szállítószalagon ömlesztett anyag szállítása során kialakuló határréteg áramlást vizsgáltunk. Az ömlesztett anyagot nem-newtoni folyadékként modelleztük, a jelenségre folyadékáramlási feladatot írtunk föl. A következő fejezetben a hegesztés, illetve forrasztás során megfigyelhető ún. Marangoni-hatás leírásával foglalkoztunk. A felületi feszültség által indukált áramlást parciális differenciálegyenlet-rendszerrel adjuk meg, melynek meghatároztuk egy exponenciális sor alakú megoldását. Harmadikként fóliák és lemeztáblák gyártásánál előforduló mozgó, áteresztő síklap mentén kialakuló konvektív határréteg áramlást tanulmányoztunk. A folyamatot leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer peremérték feladatát vizsgáltuk. Végül folyadékkal telített porózus közegbe helyezett függőleges síklap mentén kialakuló határréteg áramlás matematikai leírását adtuk meg. Ez a modell a műszaki gyakorlatban hőcserélők, illetve energiahatékony épületek tervezésénél használható.

Az értekezésben nem-newtoni és newtoni folyadékok áramlását leíró parciális differenciálegyenlet-rendszerek peremérték feladatait vizsgáltuk. A vizsgálatok során hasonlósági változót és hasonlósági függvényeket vezettünk be. A hasonlósági módszer alkalmazásával a parciális differenciálegyenlet-rendszereket visszavezettük közönséges differenciálegyenlet-rendszerekre, amelyek megoldásait vizsgáltuk, illetve a feladatokban szereplő paramétereknek a megoldásokra gyakorolt hatását. A numerikus megoldásokat MAPLE 12 programban készítettük el, néhány programkódot a mellékletekben ismertetünk.

Jövőbeli kutatási irányok között elsődleges az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazása lehet. Konkrét fizikai jelenségek, kísérleti mérések elvégzése a matematikai modellek megoldásainak validálására. Illetve olyan ipari feladatok feltérképezése, ahol az alap modellek alkalmazhatóak és továbbfejleszthetőek gyártási, fejlesztési vagy akár optimalizálási eljárások során.

6.2. TÉZISEK

6.2.1. I. TÉZIS

Meghatároztam egy α dőlésszögű szállítószalagon lefelé történő, nem-newtoni folyadékként modellezett, ömlesztett anyag állandósult szállítása során a szállítószalag felületén az áramló közegben az anyag sebességének eloszlását. Numerikus számítások alapján megállapítottam, hogy az n hatványkitevő, a c koncentráció, illetve a γ anyagjellemző paraméter növelése csökkenti a mozgó felület feletti rétegben a sebesség nagyságát, míg az α dőlésszög növelése sebességnövekedést okoz.

Tézishez tartozó publikációim: [S1], [S3], [S10], [S11]

6.2.2. II. TÉZIS

Előállítottam newtoni folyadékban a felületi feszültség által indukált áramlás, az ún. Marangoni-jelenség megoldását exponenciális sor alakjában, illetve eljárást adtam meg az exponenciális sorban szereplő együtthatók meghatározására. Numerikus számítások alapján megállapítottam, hogy az m hatványkitevő növelése csökkenti a határrétegben kialakuló sebesség nagyságát, továbbá az m hatványkitevő vagy a Pr Prandtl-szám növelése a határréteg vastagságát növeli. Kis Prandtl-számok ($Pr < 2,5$) esetén a határrétegbeli hőmérséklet értékek csökkennek Pr növelésével, míg nagy Prandtl-számok ($Pr > 2,5$) esetén a Pr növekedésének hatása ellentétes.

Tézishez tartozó publikációim: [S4], [S7], [S8], [S9]

6.2.3. III. TÉZIS

A mozgó, áteresztő síklap fölötti határréteg áramlás matematikai modelljének hasonlósági megoldásait adtam meg numerikusan. Az elvégzett számítások alapján megállapítottam, hogy az n hatványkitevő növelése csökkenti a határrétegben kialakuló sebesség nagyságát, az n hatványkitevő, a Pr Prandtl-szám, az f_w áteresztő képesség és a λ sebességarány értékeinek növelése mellett a határrétegbeli hőmérséklet nagysága és a termikus határréteg vastagsága csökken. Az \bar{a} hőátadással arányos paraméter növelése a mozgó síklap menti hőmérsékletet növeli, de a termikus határréteg vastagságát nem

változtatja.

Tézishez tartozó publikációim: [S2], [S12], [S13], [S14], [S15], [S20]

6.2.4. IV. TÉZIS

A folyadékkal telített porózus közegben elhelyezett függőleges síklap mentén kialakuló határréteg áramlás matematikai modelljéhez megadtam a hasonlósági megoldásokat lineáris és másodfokú sűrűség-hőmérséklet összefüggés esetén numerikusan és speciális esetben analitikusan. A numerikus megoldások előállítása után megállapítottam, hogy mindhárom esetben ($\epsilon = 0$, $\epsilon = 1$ és $\epsilon \rightarrow \infty$) az n és m hatványkitevők növelése a határrétegben a sebesség és hőmérséklet értékek csökkenését eredményezi.

Tézishez tartozó publikációim: [S5], [S6], [S16], [S17], [S18], [S20]

7. SUMMARY

7.1. SUMMARY AND FUTURE RESEARCH DIRECTIONS

In this PhD dissertation I presented the numerical and the analytical solutions to four boundary value problems, which occur in every day technical practices. The considered mathematical models describe boundary layer flows of Newtonian and non-Newtonian fluids along flat plate.

Firstly the boundary layer flow was investigated in bulk materials during the transportation on the conveyor belt, which has an α angle of inclination. The bulk material was modelled as non-Newtonian fluid and we examined this fluid flow phenomenon. In the next section, the so-called Marangoni effect was described, which occurs during welding or soldering processes. This flow was induced by surface tension and was described by a system of partial differential equations. The solution of the system was determined in the form of power series. After that a convective boundary layer flow model was studied, which occurs in the manufacturing processes of films and sheets produced over a moving and permeable flat plate. We investigated the boundary value problem of the system of partial differential equations. Finally, we considered the boundary layer flow along a vertical flat plate in fluid saturated porous medium. This model can be used in the technical practice to design heat exchange and energy efficient building elements.

In the dissertation, the flows of non-Newtonian and Newtonian fluids were described by boundary value problems of a system of partial differential equations. Similarity variables and similarity functions were introduced in order to reduce the system of partial differential equations to a system of ordinary differential equations. We have solved these boundary value problems by using the symbolic algebra software Maple 12. Some program codes are presented in the appendix.

In my future research I would like to apply the obtained theoretical results in to practice. Specific physical phenomena and experimental measurements will be performed to validate the solutions of the mathematical models. In addition, I intend to find out how my models can be applied in industrial applications and then how they can be improved for manufacturing, development and optimization.

7.2. THESES

7.2.1. I. THESIS

I have determined the velocity profiles in the bulk materials modelled as non-Newtonian fluid, during steady transportation on the conveyor belt with an α angle inclination. Based on the numerical calculations, I found that increasing the exponent n , the concentration c and the material characteristic parameter γ leads to a decrease in the value of the velocity in the layer above the moving surface, while this value increases if the angle of inclination α increases.

My publications concerning this thesis: [S1], [S3], [S10], [S11]

7.2.2. II. THESIS

I have calculated the solution of surface tension induced flow the so-called Marangoni effect of the Newtonian fluid in a power series form. I gave a method to determine the coefficients of the power series. Based on numerical calculations, I observed that the values of velocity decrease in the boundary layer as the power exponent m increases, moreover the boundary layer thickness increases as m or the Prandtl number Pr increases. For low Prandtl numbers ($Pr < 2,5$), the values of the temperature decrease as Pr increases and for high Prandtl numbers ($Pr > 2,5$), the influence of Pr is opposite.

My publications concerning this thesis: [S4], [S7], [S8], [S9]

7.2.3. III. THESIS

I have determined the similarity solutions to the mathematical model of the boundary layer flows over a moving permeable flat plate numerically. Based on the numerical calculations, I found that the increase of the power exponent n leads to a decrease in the value of the velocity in boundary layer. Moreover, increasing exponent n , Prandtl number Pr , permeability f_w and velocity ratio λ leads to a decrease in the temperature in the thermal boundary layer and the value of the boundary layer thickness. The plate surface temperature increases as the heat transfer parameter \bar{a} increases and the thermal boundary layer thickness does not change.

My publications concerning this thesis: [S2], [S12], [S13], [S14], [S15], [S20]

7.2.4. IV. THESIS

I have calculated the similarity solutions to the boundary layer flow along a vertical flat plate placed in fluid saturated porous medium in linear and quadratic density-temperature variation cases numerically and in one case analytically. Based on the numerical calculations, I found that in all three cases ($\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ and $\varepsilon \rightarrow \infty$) the increase of the power exponent n or m leads to a decrease in the values of the velocity and the temperature in the boundary layer.

My publications concerning this thesis: [S5], [S6], [S16], [S17], [S18], [S20]

MELLÉKLET

AZ EXPONENCIÁLIS SOR EGYÜTTHATÓINAK SZÁMÍTÁSA A MARANGONI-HATÁS MOZGÁSEGYLETÉBEN

```
> restart;
> A[0]:=3/(m + 2);
> for k from 1 to 10 do L[k]:=kA[k]; od;
> for k from 1 to 10 do M[k]:=k^2A[k]; od;
> for k from 1 to 10 do N[k]:=k^3A[k]; od;
> f:=s->(y(A[0]+A[1]s+A[2]s^2+A[3]s^3+A[4]s^4+A[5]s^5+A[6]s^6
> +A[7]s^7+A[8]s^8+A[9]s^9+A[10]s^10));
> fp:=s->-(y^2(L[1]s+L[2]s^2+L[3]s^3+L[4]s^4+L[5]s^5+L[6]s^6
> +L[7]s^7+L[8]s^8+L[9]s^9+L[10]s^10));
> fpp:=s->(y^3(M[1]s+M[2]s^2+M[3]s^3+M[4]s^4+M[5]s^5+M[6]s^6
> +M[7]s^7+M[8]s^8+M[9]s^9+M[10]s^10));
> fppp:=s->-(y^4(N[1]s+N[2]s^2+N[3]s^3+N[4]s^4+N[5]s^5+N[6]s^6
> +N[7]s^7+N[8]s^8+N[9]s^9+N[10]s^10));
> Eq1:=fppp(s)+((m+2)/3)f(s)fpp(s)-(((2m)+1)/(3)fp(s))(fp(s));
> aa:=simplify(Eq1);
> bb:=convert(aa,polynomial);
> coeff(bb,s,2);
> A[1]:=simplify(solve(coeff(bb,s,0)=0,A[1]));
> A[2]:=simplify(solve(coeff(bb,s,2)=0,A[2]));
> subs(A[2],bb);
> A[3]:=simplify(solve(coeff(bb,s,3)=0,A[3]));
> subs(A[3],bb); A[4]:=simplify(solve(coeff(bb,s,4)=0,A[4]));
> subs(A[4],bb); A[5]:=simplify(solve(coeff(bb,s,5)=0,A[5]));
> subs(A[5],bb); A[6]:=simplify(solve(coeff(bb,s,6)=0,A[6]));
> subs(A[6],bb); A[7]:=simplify(solve(coeff(bb,s,7)=0,A[7]));
> subs(A[7],bb); A[8]:=simplify(solve(coeff(bb,s,8)=0,A[8]));
> subs(A[8],bb); A[9]:=simplify(solve(coeff(bb,s,9)=0,A[9]));
> subs(A[9],bb); A[10]:=simplify(solve(coeff(bb,s,10)=0,A[10]
> ));
> f(s);
> fp(s); fpp(s);
```

AZ EXPONENCIÁLIS SOR EGYÜTTHATÓINAK SZÁMÍTÁSA A MARAN-GONI-HATÁS ENERGIAEGYENLETÉBEN

```

> restart;
> f(s); fp(s); fpp(s);
> for k to 10 do R[k]:=kB[k] end do;;
> for k to 10 do P[k]:=k^2B[k] end do;
> W:=B[0]+B[1]s+B[2]s^2+B[3]s^3+B[4]s^4+B[5]s^5+B[6]s^6+
> B[7]s^7+B[8]s^8+B[9]s^9+B[10]s^10;
> Wp:=-y(R[1]s+R[2]s^2+R[3]s^3+R[4]s^4+R[5]s^5+R[6]s^6+
> R[7]s^7+R[8]s^8+R[9]s^9+R[10]s^10);
> Wpp:=y^2(P[1]s+ P[2]s^2+P[3]s^3+P[4]s^4+P[5]s^5+P[6]s^6+
> P[7]s^7+P[8]s^8+P[9]s^9+P[10]s^10);
> Pr:=pr; Eq2:=Wpp(s)/Pr+((m+2)(1/3))f(s)Wp(s)-(1+m)fp(s)W(s);
> aaa:=simplify(Eq2);
> bbb:=convert(aaa,polynom); degree(bbb,s); coeff(bbb,s,2);
> coeff(bbb,s,1); B[0]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,0)=0,B[0]));
> B[1]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,1)=0,B[1]));
> coeff(bbb,s,2); B[2]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,2)=0,B[2]));
> coeff(bbb,s,3); B[3]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,3)=0,B[3]));
> coeff(bbb,s,4); B[4]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,4)=0,B[4]));
> coeff(bbb,s,5); B[5]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,5)=0,B[5]));
> coeff(bbb,s,6); B[6]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,6)=0,B[6]));
> coeff(bbb,s,7); B[7]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,7)=0,B[7]));
> coeff(bbb,s,8); B[8]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,8)=0,B[8]));
> coeff(bbb,s,9); B[9]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,9)=0,B[9]));
> coeff(bbb,s,10); B[10]:=simplify(solve(coeff(bbb,s,10)=0,
> B[10]));
> W(s);

```

SEBESSÉG PROFIL SZÁMÍTÁSA MOZGÓ, ÁTRESZTŐ SÍKLAP FÖLÖTT

```
> restart;
> with(plots);
> h:=10.00; n:=1; lambda:=-0.4;
> Eq1:=diff((diff(f(eta),eta,eta))^(n-1)(diff(f(eta),eta,
> eta)),eta)+f(eta)(diff(f(eta),eta,eta))/(n+1)=0;
> Eq2:=diff((diff(f(eta),eta,eta))^(n-1)(diff(theta(eta),
> eta)),eta)+Pr f(eta)(diff(theta(eta),eta))/(n+1)=0;
> bcs:=f(0)=fw, (D(f))(0)=-lambda, (D(f))(h)=1;
> Fw:=[-1,0,2];
> restart;
> for l from 1 to 3 do
> Df:=dsolve(eval(Eq1,bcs,fw=Fw[l]),[f(eta)],numeric,
> output=listprocedure);
> Ydf||l:=rhs(Df[3])
> end do;
> plot([Ydf||(1..3)],0..10,color=[red,blue,green],labels=
> [eta,(D(f))(eta)]);
```

HŐMÉRSÉKLETPROFIL SZÁMÍTÁSA MOZGÓ, ÁTRESZTŐ SÍKLAP FÖLÖTT

```
> restart;
> with(plots);
> a:=1; h:=7.6090; n:=0.5; fw:=0; lambda:=-0.4;
> Eq1:=diff((diff(f(eta),eta,eta))^(n-1)(diff(f(eta),eta,
> eta)),eta)+f(eta)(diff(f(eta),eta,eta))/(n+1)=0;
> Eq2:=diff((diff(f(eta),eta,eta))^(n-1)(diff(theta(eta),
> eta)),eta)+Pr f(eta)(diff(theta(eta),eta))/(n+1)=0;
> bcs:=f(0)=fw, (D(f))(0)=-lambda, (D(f))(h)=1;
> bcs2:=theta(h)=0, (D(theta))(0)=-a(1-theta(0));
> PR:=[2.5,7,15];
> for k from 1 to 3 do
> R:=dsolve(eval(Eq1,Eq2,bcs,bcs2,Pr=PR[k]),[f(eta),
> theta(eta)],numeric,output=listprocedure);
> Y||k:=rhs(R[5]); YP||k:=-rhs(R[6]); Yf||k:=rhs(R[3])
> end do;
> print([(YP||(1..3))(0)]);
> plot([Y||(1..3)],0..8.0,color=[red,green,blue],
> labels=[eta,theta(eta)]);
```

SEBESSÉG ÉS HŐMÉRSÉKLET PROFIL SZÁMÍTÁSA FOLYADÉKKAL TELÍTETT PORÓZUS KÖZEGBEN

```
> restart;
> with(plots);
> m:=m; inf:=20.0; bcs1:=f(0)=0, h(inf)=0, h(0)=1;
> Eq1:=diff(f(eta),eta)-h(eta)=0;
> Eq2:=(101-100n)(diff(h(eta),eta,eta))-(1+2m)(diff(f(eta)
> ,eta))h(eta)+(1+m)f(eta)(diff(h(eta),eta))=0;
> M:=[-2/3,-5/8,-1/2,-3/8,-1/3,-1/4,-1/8,0,0.1,0.2,0.3,
> 0.4,0.5,1];
> for k to 14 do R:=dsolve(eval(Eq1,Eq2,bcs1,m=M[k]),
> [f(eta),h(eta)],
> numeric,output=listprocedure,continuation=n);
> Yfv||k:=rhs(R[3])^2; Yh||k:=rhs(R[3]);
> Yhv||k:=rhs(R[4]); Yhvk||k:=rhs(R[3])+rhs(R[4]) end do;
> print([(Yh||(1..14))(0)]); print([(Yhv||(1..14))(0)]);
> print([(Yhvk||(1..14))(0)]);
> plot([Yfv||(3,4,6,8,10,13)],0..8,labels=[eta,(D(f))(eta)],
> color=[blue,red,green,gold],thickness=2);
> plot([Yh||(3,4,6,8,10,13)],0..10,labels=[eta,h(eta)],
> color=[blue,red,green,gold],thickness=2);
```

AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN KÉSZÍTETT SAJÁT PUBLIKÁCIÓK

Folyóiratcikkek

- [S1] Vadászné dr. Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Határréteg áramlás lejtőn, Miskolci Egyetem Közleményei, Multidiszciplináris tudományok, 1. kötet (2011) 1. szám, pp. 111-118., ISSN 2062-9737
- [S2] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Similarity Solution to a Thermal Boundary Layer Model of a non-Newtonian Fluid with a Convective Surface Boundary Condition, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 8, No. 6, 2011, pp. 131-140., ISSN 1785-8860, IF 0.385
- [S3] Gabriella Bognár, Imre Gombkötő, Krisztián Hriczó: Power-law Non-Newtonian Fluid Flow on an Inclined Plane, International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 6, No. 1, 2012. pp. 72-80., ISSN 1998-0140
- [S4] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Series Solutions for Marangoni Convection on a Vertical Surface, Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2012, Article ID 314989, 18 pages, doi:10.1155/2012/314989, IF 1.383
- [S5] Krisztián Hriczó, Gabriella Bognár: Numerical Analysis of Free Convection from a Vertical Surface Embedded in a Porous Medium, Topics in Intelligent Engineering and Informatics, Applied Information Science, Engineering and Technology, Springer, Vol. 7. 2014. pp 81-102. doi:10.1007/978-3-319-01919-2_6
- [S6] Vadászné Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Porózus közegbe helyezett függőleges síklapon konvektív határréteg áramlás vizsgálata, ME Közleményei, Multidiszciplináris Tudományok, 3. kötet, (2013) 1. sz. pp 195-202. HU ISSN 2062-9737

Konferenciaközlemények

- [S7] Hriczó Krisztián: A Marangoni effektus vizsgálata nemnewtoni közegekre, Doktoranduszok Fóruma 2010, Miskolc, 2010. november 10. Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Szekciókiadványa, Miskolci Egyetem Innovációs és Technológia Transzfer Centrum, pp. 68-73.
- [S8] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: On the investigation of Marangoni effect for Newtonian Fluids, XXV. microCAD International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary, 31 March-1 April 2011, pp. 7-12. Section F: Mathematics and Computer Science, ISBN 978-963-661-959-6
- [S9] Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: A Marangoni hatás vizsgálata hasonlósági megoldásokkal, OGÉT 2011, 19th International Conference on Mechanical Engineering, Sumuleu-Ciuc, April 28 - May 1, 2011 pp. 61-64., ISSN 2068-1267
- [S10] Vadászné dr. Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Határréteg áramlás ferde szállítószalagon, Műszaki Tudományok az Észak-Kelet Magyarországi régióban 2011. május 18., pp. 357-364, ISBN 978-963-7064-25-8
- [S11] Bognár, G., Hriczó K., Gombkötő I.: Non-Newtonian fluid flow down an inclined plane, Proc. of the 9th ASME/WSEAS International Conference on Fluid Mechanics & Aerodynamics, Florence, Italy, August 23-25, 2011. pp. 129-134., ISBN: 987-1-61804-026-8
- [S12] Hriczó Krisztián: Nemnewtoni folyadékok határréteg áramlásának hasonlósági megoldásai konvektív felületi peremfeltételek mellett, Doktoranduszok Fóruma 2011, Miskolc, 2011. november 08. Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Szekciókiadványa, Miskolci Egyetem Tudományszervezési és Nemzetközi Osztály, pp. 60-65.
- [S13] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Laminar thermal boundary layer model for power-law fluids over a permeable surface with convective boundary condition, in Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat & Mass Transfer and Biology, Harvard, Cambridge, USA, January 25-27, 2012. pp. 198-203., ISBN:978-1-61804-065-7
- [S14] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó, Zoltán Csáti: Laminar thermal boundary layer of a power-law fluid over a flat plate with a convective surface boundary condition, XXVI. microCAD International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary, 29-30 March 2012, E11,

Section E: Mathematics and Computer Science, ISBN 978-963-661-773-8, 6 pages

- [S15] Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Termikus határréteg áramlás vizsgálata hatványközegre, OGÉT 2012, 20th International Conference on Mechanical Engineering, Cluj-Napoca, April 19 - 22, 2012 pp. 80-83., ISSN 2068-1267
- [S16] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó, Zoltán Csáti: Investigation of the boundary layer over a vertical plate embedded in porous medium, XXVII. microCAD International Scientific Conference, University of Miskolc, Hungary, 21-22 March 2013, E5, Section E: Mathematics and Computer Science, ISBN 978-963-358-018-9, 6 pages
- [S17] Bognár Gabriella, Hriczó Krisztián: Határréteg áramlás numerikus vizsgálata porózus közegben, OGÉT 2013, 21st International Conference on Mechanical Engineering, Arad, April 25 - 28, 2013 pp. 71-74., ISSN 2068-1267
- [S18] Hriczó Krisztián: Termikus határréteg áramlás vizsgálata folyadékkal telített porózus közegben, Tavaszi Szél 2013., Budapest, pp. 184-190., ISBN 978-963-89560-2-6
- [S19] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Forced convection flow of a non-Newtonian fluid over a flat surface in porous medium, Mathematics and Computers in Biology & Biomedical Informatics: Proceedings of the 14th International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC '13), Baltimore, USA, September 17-19, 2013. pp. 86-91., ISBN:978-960-474-333-9
- [S20] Hriczó Krisztián: Folyadékáramlási problémák vizsgálata hasonlósági módszerrel nem-newtoni közegben, XIX. FMTÜ, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2014. pp. 209-212, ISSN 2067-6808

Független hivatkozások

- [S2] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Similarity Solution to a Thermal Boundary Layer Model of a non-Newtonian Fluid with a Convective Surface Boundary Condition, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 8, No. 6, 2011, pp. 131-140., ISSN 1785-8860, IF 0.385
- [S2-1] Mutlag A.A., Uddin M.J., Ismail A.I.M.: Effect of Thermal Slip on the Falkner-Skan Stretching and Shrinking Wedge Flow of a Power-Law Fluid and Heat Transfer, *Modern Applied Science* **7** 2013. pp. 57-69.
- [S2-2] Grosan T., Merkin J.H., Pop I.: Mixed convection boundary-layer flow on a horizontal flat surface with a convective boundary condition, *Meccanica* **48**: (29) 2013. pp. 2149-2158.
- [S3] Gabriella Bognár, Imre Gombkötő, Krisztián Hriczó: Power-law Non-Newtonian Fluid Flow on an Inclined Plane, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 6, No. 1, 2012. pp. 72-80., ISSN 1998-0140
- [S3-1] Abas S.S., Mohd Yatim Y.: Similarity solution for unsteady gravity-driven dry patch in a non-Newtonian fluid flow, *AIP Conference Proceedings 20th National Symposium on Mathematical Sciences - Research in Mathematical Scienc. American Institute of Physics Inc.*, 2013. pp. 487-495., doi:10.1063/1.4801166
- [S13] Gabriella Bognár, Krisztián Hriczó: Laminar thermal boundary layer model for power-law fluids over a permeable surface with convective boundary condition, in *Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat & Mass Transfer and Biology*, Harvard, Cambridge, USA, January 25-27, 2012. pp. 198-203., ISBN:978-1-61804-065-7
- [S13-1] Siddiqui A.M., Mitkova M.K., Ansari A.R.: Two-phase Flow of a Third Grade Fluid Between Parallel Plates, *WSEAS Trans Fluid Mech* **7**: (4) 2012. pp. 117-128.

IRODALOMJEGYZÉK

Irodalomjegyzék

- [1] Ahmad F., Al-Barakati W.H.: *An approximate analytic solution of the Blasius problem*, Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul., **14** 2009. pp. 1021-1024.
- [2] Allen M.B., Behic G.A., Trangenstein J.A.: *Multiphase Flow in Porous Media*, Lecture. Notes in Engineering, Springer, New York, 1988.
- [3] Ancy C.: *Flow down inclined channel as a discriminating experiment*, Research Riport 2003.
- [4] Anderson J.D.: *Ludwig Prandtl's Boundary Layer*, Physics Today Online **58** 2005. pp. 42-48. doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.2169443>
- [5] Arafune K., Hirata A.: *Interactive solutal and thermal Marangoni convection in a rectangular open boat*, Numerical Heat Transfer Part A **34** 1998. pp. 421-429.
- [6] Arifin N. M., Nazar R., Pop I.: *Marangoni-drien boundary layer flow in nanofluids*, Latest Trends on Theoretical and Applied Mechanics, Fluid Machanics and Heat & Mass Transfer, Corfu Island, Greece, July 22-24. 2010. pp. 32-35.
- [7] Aziz A.: *A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **14** 2009. pp. 1064-1068.
- [8] Barrow H., Rao T.L.S.: *The effect of variable beta on free convection*. Br. Chem. Eng. **16** 1971. pp. 704-709.
- [9] Bataller R.C.: *Radiation effects for the Blasius and Sakiadis flows with a convective surface boundary condition*, Appl. Math. Comput., **206** 2008. pp. 832-840.
- [10] Benedetto D., Caglioti E., Pulvirenti M.: *A kinetic equation for granular media*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **31**, 5(1997), 615-641. Erratum in M2AN Math. Model. Numer. Anal. **33**, 2. 1999. pp. 439-441.
- [11] Benedetto D., Pulvirenti M.: *On the one-dimensional Boltzman equation for granular flows*, Phys. Fluids **16**, 12. 2004. pp. 4235-4247.

- [12] Blasius H.: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung*, Z. Math. Phys., **56** 1908. pp. 1-37.
- [13] Bobylev A.V., Cercignani C., Toscani G.: *Proof of an asymptotic property of self-similar solutions of the Boltzman equation for granular materials*, J. Statist. Phys. **111**, 1-2. 2003. pp. 403-417.
- [14] Bognár G.: *Analytic solutions to the boundary layer problem over a stretching wall*, Computers and Mathematics with Applications **61** 2011. pp. 2256-2261.
- [15] Bognár G.: *On similarity solutions to boundary layer problems with upstream moving wall in non-Newtonian power-law fluids*, IMA J. Applied Mathematics **77** No. 4 2012. pp. 546-562.
- [16] Bognár G.: *Analytic Solutions to a Boundary Layer Problem for Non-Newtonian Fluid Flow Driven by Power Law Velocity Profile*, WSEAS Transactions on Fluid Mechanics **6** 2011. pp. 22-31.
- [17] Bognár G., Z. Csáti: *Numerical solution to boundary layer problems over moving flat plate in non-Newtonian media*, Journal of Applied Mathematics and Physics **2** 2014. pp. 8-13
- [18] Bognár G.: *Similarity solution of a boundary layer flow for non-Newtonian fluids*, Int. J. Nonlinear Sciences and Numerical Simulation **10** 2009. pp. 1555-1566.
- [19] Briot Ch., Bouquet J.K.: *Étude des fonctions d'une variable imaginaire*, J. Ecole Impériale. Polytechnique, Cashier **36** 1856. pp. 85-131.
- [20] Buongiorno J.: *Convective transport in nanofluids*, ASME J. Heat Transfer, **128** 2005. pp. 240-250. Doi:10.1115/1.2150834
- [21] Cercignani C.: *Shear flow of a granular material*, J. Statist. Phys. **102**, 5-6. 2001. pp. 1407-1415.
- [22] Cheng P., Minkowycz W.J.: *Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike*, Journal of Geophysical Research **82** 1977. pp. 2040-2044.
- [23] Cheng P., Chang I.-D.: *Buoyancy induced flows in a saturated porous medium adjacent to impermeable horizontal surface*, Int. J. Heat Mass Transfer **19** 1976. pp. 1267-1272.

- [24] Christopher D.M., Wang B-X.: *Marangoni convection around a bubble in microgravity, heat transfer*, in: Proceedings of the 11th International Heat Transfer Conference, Taylor and Francis, Levittown, PA, **3** 1998. pp. 489-494.
- [25] Christopher D.M., Wang B.: *Prandtl number effects for Marangoni convection over a flat surface*, Int. J. Thermal Sci. **40** 2001. pp. 564-570.
- [26] Christopher D.M., Wang B-X.: *Similarity simulation for Marangoni convection around a vapor bubble during nucleation and growth*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **44** 2001. pp. 799-810.
- [27] Congedo P.M., Collura S., Congedo P.M.: *Modeling and analysis of natural convection heat transfer in nanofluids*, In: Proc. ASME Summer Heat Transfer Conf. 2009., **3** 2009. pp. 569-579.
- [28] Cortell R.: *Numerical solutions of the classical Blasius flat-plate problem*, Appl. Math. Comput., **170** 2005. pp. 706-710.
- [29] Das S.K., Choi S.U.S., Yu W., Pradeep T.: *Nanofluids: Science and Technology*, Wiley, New Jersey, 2007.
- [30] Dénes J., Patkó I.: *Computation of boundary layers*, Acta Polytechnica Hungarica, **1** 2004. pp. 79-87.
- [31] Furumoto A.S.: *A systematic program for geothermal exploration on the island of Hawaii*, paper presented at the 45th Annual International Meeting, Soc. of Explor. Geophys., Denver, CO. Oct. 12-16, 1975.
- [32] Gryglaszewski P., Saljnikov V.: *Universelles mathematisches model Für Dem Grenzschichtfall Mit Naturlicher Konvektion in Nicht-Newtonischen Flüssigkeiten*, Zeit. Angew. Math. Mech. (ZAMM), **69** 1989. pp. 661-664.
- [33] Haff P.: *Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon*, J. Fluid. Mech. **134** 1983. pp. 401-430.
- [34] He J.H.: *Approximate analytical solution of Blasius equation*, Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul., **3** 1998. pp. 260-263.
- [35] He J.H.: *A simple perturbation approach to Blasius equation*, Appl. Math. Comput., **140** 2003. pp. 217-222.

- [36] Ho C.J., Chen M.W., Li Z.W.: *Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square enclosure: Effects due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity*, Int. J. Heat & Mass Transfer, **51** 2008. pp. 4506-4516.
- [37] Ince E. L.: *Ordinary Differential Equations*, Dover Publ., New York, 1956.
- [38] Ingham D.B., Pop I. (Eds): *Transport Phenomena in Porous Media*, Oxford, 1998., **II** 2002., **III** 2005.
- [39] Ingham D.B., Bejan A., Mamut E., Pop I.: *Emerging Technologies and Techniques in Porous Media*, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, Springer Netherlands, **134** 2004. doi: 10.1007/978-94-007-0971-3
- [40] Ishak A.: *Similarity solution for flow and heat transfer over a permeable surface with convective boundary condition*, Appl. Math. Comput., **217** 2010. pp. 837-842.
- [41] Jaluria Y.: Fluid Flow Phenomena in Materials Processing – The 2000 Freeman Scholar Lecture, Journal of Fluids Engineering, **123** 2001. pp. 173-210.
- [42] Jiao D., Sharma M.M.: *Investigation of Dynamic Mud Cake Formation: The Concept of Minimum Overbalance Pressure*, SPE 26323, Proceedings of the SPE 68th Annual Technical Conference & Exhibition, Houston, TX, October 3-6, 1993.
- [43] Kechil S.A., Hashim I.: *Series solutions of boundary-layer flows in porous media with lateral mass flux*, Heat Mass Transfer, **44** 2008. pp. 1179-1186.
- [44] Lai F.C.: *Mixed Convection in Saturated Porous Media*. In Handbook of porous media (ed. K. Vafai), Marcel Dekker, New York 2000. pp. 605-661.
- [45] Lesnic D., Ingham D.B., Pop I.: *Free convection boundary-layer flow along a vertical surface in a porous medium with Newtonian heating*, Int. J. of Heat and Mass Transfer **42** 1999. pp. 2621-2627.
- [46] Li H., Toscani G.: *Long-time asymptotics of kinetic models of granular flows*, Arch. Ration. Mech. Anal. **172**, 3. 2004. pp. 407-428.
- [47] Liao S.J.: *An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius viscous flow problems*, Int. J. Non-Linear Mech., **34** 1999. pp. 759-778.

- [48] Magyari E.: *The moving plate thermometer*, Int. J. Therm. Sci., **47** 2008. pp. 1436-1441.
- [49] Magyari E.: *Comment on „A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition” by A. Aziz*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2009; *14*:1064-8, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **16** 2011. pp. 599-601.
- [50] Magyari E., Keller B.: *Exact analytic solutions for free convection boundary layers on a heated vertical plate with lateral mass flux embedded in a saturated porous medium*, Heat Mass Transfer, **36** 2000. pp. 109-116.
- [51] Magyari E., Chamkha A.J.: *Exact analytical solutions for thermosolutal Marangoni convection in the presence of heat and mass generation or consumption*, Heat Mass Transfer, **43** (2007), 965-974.
- [52] Napolitano L.G.: *Marangoni boundary layers*, in Proceedings of the 3rd European Symposium on Material Science in Space, Grenoble, France, June 1979.
- [53] Nazar R., Arifin N.M., Pop I.: *Free convection boundary layer flow over vertical and horizontal flat plates embedded in a porous medium under mixed thermal boundary conditions*, Int. Comm. in Heat and Mass Transfer **33** 2006. pp. 87-93.
- [54] Nield D.A., Bejan A.: *Convection in Porous Media*, 2nd ed. Springer, New York 1999.
- [55] Paullet J.E.: *An uncountable number of solutions for BVP governing Marangoni convection*, Math. Comput. Modelling **52** 2010. pp. 1708-1715.
- [56] Pop I., Ingham D.B.: *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*, Pergamon, Oxford 2001. pp. 381-430.
- [57] Rees D.A.S., Pop, I.: *Free convection induced by a vertical wavy surface with uniform heat flux in a porous medium*. J. Heat Transfer **117** 1995. pp. 547-550.
- [58] Shvets Y.I., Vishnevskiy V.K.: *Effect of dissipation on convection heat transfer in flow of non-Newtonian fluid*. Heat Transfer-Soviet Research **19** 1987. pp. 38-43.

- [59] Slavtchev S., Miladinova S.: *Thermocapillary flow in a liquid layer at minimum in surface tension*, Acta Mech. **127** 1998. pp. 209-224.
- [60] Toscani G.: *Kinetic and hydrodynamic models of nearly elastic granular flows*, Monatsh. Math. **142**, 1-2. 2004. pp. 179-192.
- [61] Vajravelu K., Sastri K.S.: *Fully developed laminar free convection flow between two parallel vertical walls*, I. Int. J. Heat Mass Transf. **20** 1977. pp. 655-660.
- [62] Vajravelu K., Cannon J.R., Leto J., Semmoum R., Nathan S., Draper M., Hammock D.: *Nonlinear convection at a porous flat plate with application to heat transfer from a dike*, J. Math. Anal. Appl. **277** 2003. pp. 609-623.
- [63] Vajravelu K., Prasad K.V., Van Gorder R.A., Lee J.: *Free convection boundary layer flow past a vertical surface in a porous medium with temperature-dependent properties*, Transp. Porous Med. **90** 2011. pp. 977-992. doi: 10.1007/s11242-011-9827-5
- [64] Villani C.: *Topics in optimal transportation*, 58 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [65] Villani C.: *Mathematics of granular materials*, J. Statist. Phys. **124** 2006. pp. 781-822.
- [66] Zhang Y., Zheng L., Wang X., Song G.: *Analysis of Marangoni Convection of Non-Newtonian Power Law Fluids with Linear Temperature Distribution*, Thermal Science, **15** 2011. pp. 45-52. doi: 10.2298/TS-CI11S1045Z
- [67] Zheng L., Zhang X., Gao Y.: *Analytical solution for Marangoni convection over a liquid-vapor surface due to an imposed temperature gradient*, Math. Comput. Modelling, **48** 2008. pp. 1787-1795.
- [68] Zheng L., Zhang X., He J.: *Suitable heat transfer model for self-similar laminar boundary layer in power law fluids*, J. Thermal Science, **13** 2004. pp. 150-154.
- [69] Zheng L.-C., Chen X.-H., Zhang X.-X., He J.-C.: *An Approximately Analytical Solution for the Marangoni Convection in an In-Ga-Sb System*, Chin. Phys. Lett., **21** 2004. pp. 1983-1985.